Kapitola 8: Implicitně zadané funkce

Chcete-li ukončit prohlížení stiskněte klávesu Esc.
Chcete-li pokračovat stiskněte klávesu Enter.

Implicitně zadané funkce

- Implicitní funkce jedné reálné proměnné
- Implicitní funkce více reálných proměnných

Zpět

Implicitní funkce jedné reálné proměnné

- Příklad 8.1.1 Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

- Příklad 8.1.2 Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

- Příklad 8.1.3 Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1, 0]$ ke křivce dané rovnicí $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0\,.$

- Příklad 8.1.4 Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

- Příklad 8.1.5 Ověřte, že rovnice $F(x, y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Zpět

Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

? Zpět

Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Výsledek:

Funkce $y = f(x)$ je definována implicitně na okolí bodu A danou rovnicí a je v tomto bodě klesající a konvexní.

Zpět

Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - e^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Návod:

Ověříme podmínky věty o existenci implicitní funkce:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad F(= -1, 1) = 0 \ , \\
&2) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(-1, 1) \neq 0 \ .
\end{aligned}
$$

a vypočteme první derivaci podle věty o derivaci implicitní funkce:

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \qquad \text{pro} \quad x \in (-1-\delta, -1+\delta) \ .$$

Druhou derivaci spočteme např. derivací předcházejícího vztahu.

Zpět

Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Řešení:

V bodě $A = [-1, 1]$ platí

$$F(-1, 1) = (-1)^2 - 1 - \mathrm{e}^{1-1} + 1 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0\,,$$

dále

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -1 - \mathrm{e}^{y-1}\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(-1, 1) = -1 - 1 = -2 \neq 0\,.$$

Jsou tedy splněny předpoklady pro to, aby rovnicí $F(x, y) = 0$ v okolí bodu A byla definována jednoznačně funkce $y = f(x)$. Vypočteme $y'(x)$, $y''(x)$:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = -\frac{2x}{-1 - \mathrm{e}^{y-1}} = \frac{2x}{1 + \mathrm{e}^{y-1}}\,, \quad y'(-1) = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y''(x) = \frac{2(1 + \mathrm{e}^{y-1}) - 2x(\mathrm{e}^{y-1} \cdot y'(x))}{(1 + \mathrm{e}^{y-1})^2}\,, \qquad y''(-1) = \frac{0 - 2 \cdot (-1)}{(-2)^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Zpět

Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Maple:

```
> with(plots):
> F:=(x,y)->x^2-y-exp(y-1)+1;
```

$$F := (x,\, y) \to x^2 - y - e^{(y-1)} + 1$$

Nejprve ověříme podmínky existence funkce $y = f(x)$ na okolí bodu [-1,1]:

```
> F(-1,1);
```

$$0$$

```
> diff(F(x,y),y);
```

$$-1 - e^{(y-1)}$$

```
> subs(x=-1,y=1,%);
```

$$-1 - e^0$$

```
> simplify(%);
```

$$-2$$

Nyní můžeme počítat derivace $f'(x)$ a $f''(x)$:

```
> implicitdiff(F(x,y),y,x);
```

$$\frac{2\,x}{1 + e^{(y-1)}}$$

Další

Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Maple:

```
> subs(x=-1,y=1,implicitdiff(F(x,y),y,x));
```

$$-\frac{2}{1+e^0}$$

```
> simplify(%);
```

$$-1$$

Funkce je ve sledovaném bodě klesající.

```
> implicitdiff(F(x,y),y,x$2);
```

$$-\frac{2\,(-1-2\,e^{(y-1)}-(e^{(y-1)})^2+2\,x^2\,e^{(y-1)})}{1+3\,e^{(y-1)}+3\,(e^{(y-1)})^2+(e^{(y-1)})^3}$$

```
> subs(x=-1,y=1,implicitdiff(F(x,y),y,x$2));
```

$$-\frac{2\,(-1-(e^0)^2)}{1+3\,e^0+3\,(e^0)^2+(e^0)^3}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{1}{2}$$

Funkce je ve sledovaném bodě konvexní.

Další

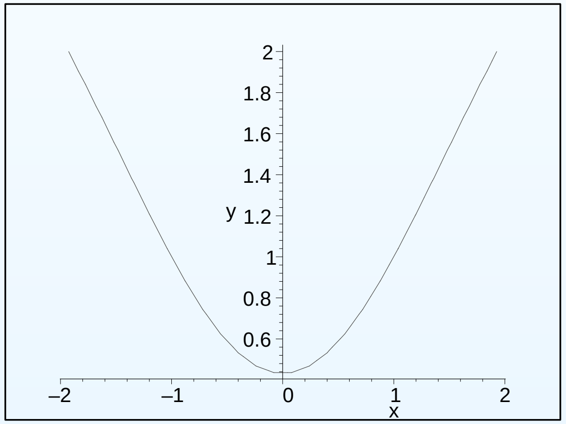
Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - e^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Maple:

O průběhu funkce $y = f(x)$ v okolí bodu [-1, 1] se můžeme v Maplu přesvědčit vykreslením funkce dané implicitně pomocí příkazu implicitplot:

```
> implicitplot(F(x,y),x=-2..2,y=-2..2);
```



Zpět

Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Mathematica:

F[x_, y_] = x^2 − y − Exp[y − 1] + 1

$1 - e^{-1+y} + x^2 - y$

Nejprve ověříme podmínky existence funkce $y = y(x)$ na okolí bodu [-1,1]: **F[−1, 1]**

0

D[F[x, y], y]/.{x → −1, y → 1}

-2

Nyní můžeme počítat derivace $y'(x)$ a $y''(x)$:

r1 = D[F[x, y[x]] == 0, x]

$2x - y'[x] - e^{-1+y[x]}y'[x] == 0$

der1 = Solve[r1, y′[x]]

$\left\{\left\{y'[x] \to \frac{2ex}{e+e^{y[x]}}\right\}\right\}$

(der1/.{x → −1})/.{y[−1] → 1}

$\{\{y'[-1] \to -1\}\}$

Funkce je ve sledovaném bodě klesající.

Další

Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Mathematica:

r2 = *D*[*F*[*x*, *y*[*x*]] == 0, {*x*, 2}]/.der1

$$\left\{2 - \frac{4e^{1+y[x]}x^2}{\left(e+e^{y[x]}\right)^2} - y''[x] - e^{-1+y[x]}y''[x] == 0\right\}$$

der2 = Solve[r2, *y*" [*x*]]

$$\left\{\left\{y''[x] \to \frac{2e\left(e^2+e^{2y[x]}+2e^{1+y[x]}-2e^{1+y[x]}x^2\right)}{\left(e+e^{y[x]}\right)^3}\right\}\right\}$$

(der2/.{*x* → −1})/.{*y*[−1] → 1}

$$\left\{\left\{y''[-1] \to \frac{1}{2}\right\}\right\}$$

Funkce je ve sledovaném bodě konvexní. O průběhu funkce $y = f(x)$ v okolí bodu [-1, 1] se můžeme v programu Mathematica přesvědčit vykreslením funkce dané implicitně pomocí příkazu ImplicitPlot:

Další

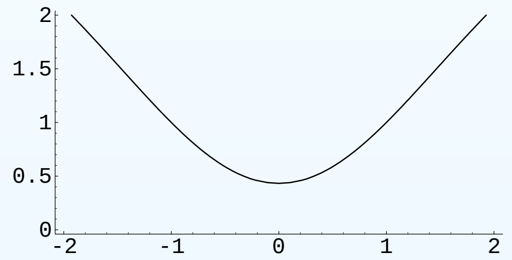
Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Mathematica:

<< Graphics\`ImplicitPlot\`

ImplicitPlot[x^2 − y − Exp[y − 1] + 1 == 0, {x, −2, 2}, {y, 0, 2}];



Zpět

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

? Zpět

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Výsledek:

V okolí bodu $[1, 0]$ leží tato křivka pod tečnou (funkce $y = f(x)$ je na okolí tohoto bodu konkávní).

Zpět

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Návod:

Ověříme, že v okolí bodu $[1, 0]$ lze křivku považovat za část grafu funkce $y = f(x)$ a dokážeme, že funkce je v okolí tohoto bodu konvexní (graf nad tečnou) nebo konkávní (graf pod tečnou). Viz návod v předchozím příkladě.

Zpět

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Řešení:

Označme $\quad F(x, y) = 2x - x^2 - e^y - 2y = 0 \quad$ a ověřme podmínky existence funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $[1, 0]$ definované rovnicí $F(x, y) = 0$:

$$F(1, 0) = 2 - 1 - e^0 - 0 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -e^y - 2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = -3 \neq 0\,.$$

Část křivky v okolí daného bodu lze proto považovat za graf funkce $y = f(x)$. O tom, zda tento graf leží pod nebo nad tečnou, lze rozhodnout na základě znalosti konvexnosti / konkávnosti funkce. Počítejme tedy $f''(1)$:

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = -\frac{2 - 2x}{-e^y - 2} \qquad\qquad f'(1) = 0$$

$$f''(x) = \frac{-2(e^y + 2) - (2 - 2x)e^y \cdot y'(x)}{(e^y + 2)^2} \qquad\qquad f''(1) = -\tfrac{2}{3}\,.$$

Další

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Řešení:

Zjistili jsme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 = 1$ lokální maximum (je na jeho okolí konkávní), studovaná křivka tedy leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou.

Zpět

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Maple:

```
> with(plots):
> F:=(x,y)->2*x-x^2-exp(y)-2*y;
```

$$F := (x,\, y) \to 2\,x - x^2 - e^y - 2\,y$$

Nejprve ověříme podmínky existence funkce $y = f(x)$ na okolí bodu [1,0]:

```
> F(1,0);
```

$$0$$

```
> diff(F(x,y),y);
```

$$-e^y - 2$$

```
> subs(x=1,y=0,%);
```

$$-e^0 - 2$$

```
> simplify(%);
```

$$-3$$

Nyní potřebujeme znát derivace $f'(1)$ a $f''(1)$:

```
> implicitdiff(F(x,y),y,x);
```

$$-\frac{2\,(-1 + x)}{e^y + 2}$$

```
> subs(x=1,y=0,implicitdiff(F(x,y),y,x));
```

$$0$$

Další

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Maple:

```
> implicitdiff(F(x,y),y,x$2);
```

$$-\frac{2\left((e^y)^2 + 6\,e^y + 4 + 2\,e^y\,x^2 - 4\,e^y\,x\right)}{(e^y)^3 + 6\,(e^y)^2 + 12\,e^y + 8}$$

```
> subs(x=1,y=0,implicitdiff(F(x,y),y,x$2));
```

$$-\frac{2\left((e^0)^2 + 4\,e^0 + 4\right)}{(e^0)^3 + 6\,(e^0)^2 + 12\,e^0 + 8}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{-2}{3}$$

Funkce je v okolí daného bodu konkávní, její graf tedy leží pod tečnou. Přesvědčit se můžeme pomocí obrázku (nakreslíme tečnu a křivku):

```
> t:=plot(0,x=-2..2,thickness=3):
> k:=implicitplot(F(x,y),x=-2..2,y=-2..2,grid=[50,50],thickness=3):
```

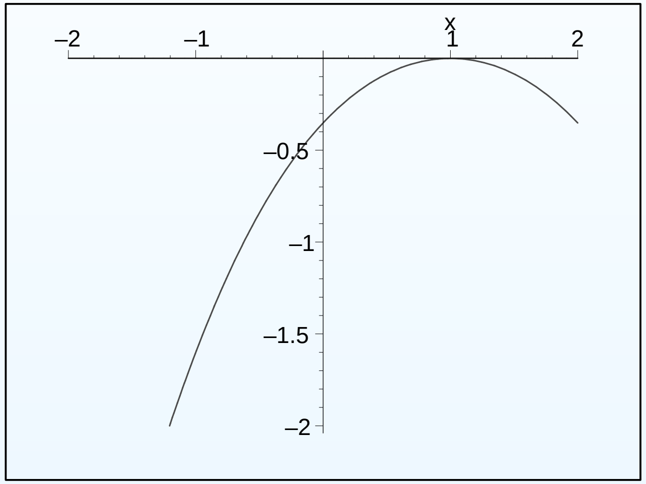
Další

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Maple:

```
> display({t,k});
```



Zpět

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Mathematica:

$\boldsymbol{F[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = 2x - x\hat{}2 - \mathrm{Exp}[y] - 2y}$

$-e^y + 2x - x^2 - 2y$

Nejprve ověříme podmínky existence funkce $y = y(x)$ na okolí bodu [1,0]:

$\boldsymbol{F[1, 0]}$

0

$\boldsymbol{D[F[x, y], y]/.\{x \to 1, y \to 0\}}$

-3

Nyní potřebujeme znát derivace $y'(1)$ a $y''(1)$:

$\boldsymbol{\mathrm{r1} = D[F[x, y[x]] == 0, x]}$

$2 - 2x - 2y'[x] - e^{y[x]}y'[x] == 0$

$\boldsymbol{\mathrm{der1} = \mathrm{Solve}[\mathrm{r1}, y'[x]]}$

$\left\{\left\{y'[x] \to -\frac{2(-1+x)}{2+e^{y[x]}}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{(\mathrm{der1}/.\{x \to 1\})/.\{y[1] \to 0\}}$

$\{\{y'[1] \to 0\}\}$

Další

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Mathematica:

$\mathbf{r2 = D[F[x, y[x]] == 0, \{x, 2\}]/.der1}$

$$\left\{-2 - \frac{4e^{y[x]}(-1+x)^2}{\left(2+e^{y[x]}\right)^2} - 2y''[x] - e^{y[x]}y''[x] == 0\right\}$$

$\mathbf{der2 = Solve[r2, y''[x]]}$

$$\left\{\left\{y''[x] \to \frac{2\left(4+6e^{y[x]}+e^{2y[x]}-4e^{y[x]}x+2e^{y[x]}x^2\right)}{\left(-2-e^{y[x]}\right)\left(2+e^{y[x]}\right)^2}\right\}\right\}$$

$\mathbf{(der2/.\{x \to 1\})/.\{y[1] \to 0\}}$

$$\left\{\left\{y''[1] \to -\frac{2}{3}\right\}\right\}$$

Funkce je v okolí daného bodu konkávní, její graf tedy leží pod te čnou. Přesvědčit se můžeme pomocí obrázku (nakreslíme tečnu a křivku):

```
<< Graphics`ImplicitPlot`
t = Plot[0, {x, −2, 2}, PlotStyle → {Thickness[0.008]}, DisplayFunction → Identity];
g = ImplicitPlot[F[x, y] == 0, {x, −2, 2}, {y, −2, 0}, PlotStyle → {Thickness[0.008]},
DisplayFunction → Identity];
```

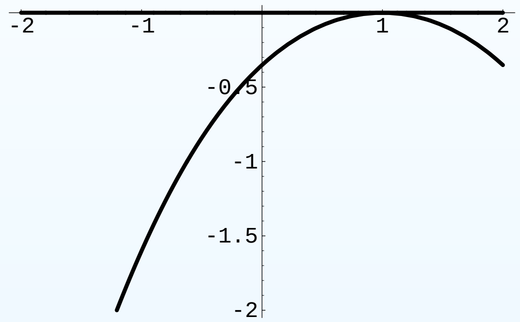
Další

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Mathematica:

Show[{t, g}, DisplayFunction → $DisplayFunction];



Zpět

Příklad 8.1.3

Najděte rovnici tečny a normály v bodě [1, 0] ke křivce dané rovnicí
$2x - x^2 - e^y - 2y = 0$.

? Zpět

Příklad 8.1.3

Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1, 0]$ ke křivce dané rovnicí
$2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$.

Výsledek:

$t: \quad y = 0\,, \qquad$ normála $n: \quad x = 1\,.$

Zpět

Příklad 8.1.3

Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1, 0]$ ke křivce dané rovnicí
$2x - x^2 - e^y - 2y = 0\,.$

Návod:

Nejprve ověříme, že na okolí daného bodu křivka odpovídá jednoznačně grafu funkce $y = f(x)$. Rovnice tečny v bodě $[x_0, y_0]$ má potom podobu

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

normálou v tomto bodě je přímka k tečně kolmá.

Zpět

Příklad 8.1.3

Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1,0]$ ke křivce dané rovnicí
$2x - x^2 - e^y - 2y = 0$.

Řešení:

Označme $F(x,y) = 2x - x^2 - e^y - 2y$ a ověřme, že na okolí bodu $[1,0]$ rovnice $F(x,y) = 0$ určuje jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou platí $f(1) = 0$ a která má na intervalu $I = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou derivaci $f'(x)$:

$$F(1,0) = 2 - 1 - e^0 - 0 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -e^y - 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = -3 \neq 0 \,.$$

Předpoklady věty o implicitní funkci jsou splněny, lze tedy vypočítat $f'(1)$:

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)} = -\frac{2-2x}{-e^y - 2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(1) = 0 \,.$$

Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[x_0, y_0]$ má podobu

$$t: \quad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \,,$$

po dosazení dostáváme $\quad t: \; y = 0(x-1) + 0 = 0.$

Další

Příklad 8.1.3

Najděte rovnici tečny a normály v bodě [1, 0] ke křivce dané rovnicí $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0\,.$

Řešení:

Tečnou k zadané křivce v bodě [1, 0] je tedy osa x. Normálou je přímka k ní kolmá procházející bodem [1, 0], tedy přímka o rovnici $x = 1$. Pozor! V tomto případě se jedná o přímku, která nemá definovanou směrnici, takže nelze použít pro normálu rovnici

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\,.$$

Zpět

Příklad 8.1.3

Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1, 0]$ ke křivce dané rovnicí
$2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$.

Maple:

```
> with(plots):
> F:=(x,y)->2*x-x^2-exp(y)-2*y;
```

$$F := (x,\, y) \to 2\,x - x^2 - e^y - 2\,y$$

```
> F(1,0);
```

$$0$$

```
> diff(F(x,y),y);
```

$$-e^y - 2$$

```
> subs(x=1,y=0,%);
```

$$-e^0 - 2$$

```
> simplify(%);
```

$$-3$$

Ověřili jsme předpoklady věty o implicitní funkci a nyní můžeme počítat $f'(x)$:

```
> implicitdiff(F(x,y),y,x);
```

$$-\frac{2\,(-1+x)}{e^y + 2}$$

```
> subs(x=1,y=0,implicitdiff(F(x,y),y,x));
```

$$0$$

Další

Příklad 8.1.3

Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1,0]$ ke křivce dané rovnicí
$2x - x^2 - e^y - 2y = 0$.

Maple:

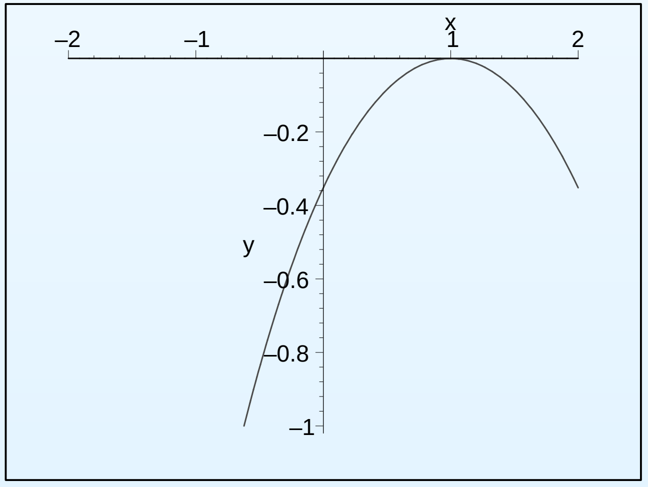
Rovnice tečny v bodě [1,0] bude:

```
> y1:=0+(%)*(x-1);
```

$$y1 := 0$$

Vzhledem k tomu, že hledanou tečnou je osa x, je zřejmě normálou přímka kolmá k ose x, která prochází bodem [1,0], což je přímka o rovnici $x = 1$.
Náhled na celou situaci si můžeme udělat z obrázku grafu funkce $f(x)$ na okolí bodu [1,0]:

```
> k:=implicitplot(F(x,y),x=-1..2,y=-1..2,thickness=3,grid=[50,50]):
> t:=plot(0,x=-2..2,color=blue,thickness=3):
> display({t,k});
```



Zpět

Příklad 8.1.3

Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1, 0]$ ke křivce dané rovnicí
$2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$.

Mathematica:

$\boldsymbol{F[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = 2x - x\hat{}2 - \mathrm{Exp}[y] - 2y}$

$-e^y + 2x - x^2 - 2y$

$\boldsymbol{F[1, 0]}$

0

$\boldsymbol{D[F[x, y], y]/.\{x \to 1, y \to 0\}}$

-3

Ověřili jsme předpoklady věty o implicitní funkci a nyní můžeme po čítat $f'(x)$:

$\boldsymbol{\mathrm{r1} = D[F[x, y[x]] == 0, x]}$

$2 - 2x - 2y'[x] - e^{y[x]}y'[x] == 0$

$\boldsymbol{\mathrm{der1} = \mathrm{Solve}[\mathrm{r1}, y'[x]]}$

$\left\{\left\{y'[x] \to -\frac{2(-1+x)}{2+e^{y[x]}}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{(\mathrm{der1}/.\{x \to 1\})/.\{y[1] \to 0\}}$

$\{\{y'[1] \to 0\}\}$

Rovnice tečny v bodě [1,0] bude:

$\boldsymbol{\mathrm{tecna} = y - 0 == 0(x - 1)}$

$y == 0$

Další

Příklad 8.1.3

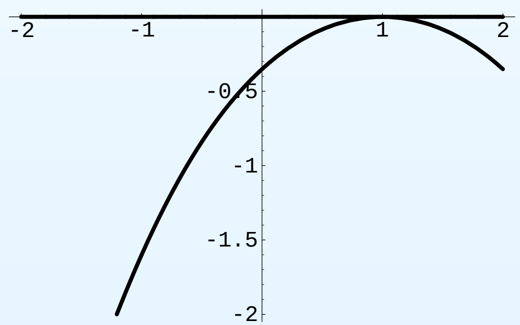
Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1, 0]$ ke křivce dané rovnicí
$2x - x^2 - e^y - 2y = 0$.

Mathematica:

Vzhledem k tomu, že hledanou tečnou je osa x, je zřejmě normálou přímka kolmá k ose x, která prochází bodem [1,0], což je přímka o rovnici $x = 1$.

Náhled na celou situaci si můžeme udělat z obrázku grafu funkce $f(x)$ a tečny na okolí bodu [1,0]:

```
<< Graphics`ImplicitPlot`
t = Plot[0, {x, −2, 2}, PlotStyle → {Thickness[0.008]}, DisplayFunction → Identity];
g = ImplicitPlot[F[x, y] == 0, {x, −2, 2}, {y, −2, 0}, PlotStyle → {Thickness[0.008]},
DisplayFunction → Identity];
Show[{t, g}, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```



Zpět

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

? Zpět

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

Výsledek:

$\alpha = 45^\circ$.

Zpět

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

Návod:

Bod $[1, 0]$ je průsečíkem přímky p s danou křivkou, hledaný úhel proto vypočteme jako úhel svíraný tečnou ke křivce v bodě $[1, 0]$ a přímkou p.

Zpět

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

Řešení:

Označíme-li $F(x, y) = 2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$, pak platí:

$$F(1, 0) = 2 - 1 - \mathrm{e}^0 - 0 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -\mathrm{e}^y - 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = -3 \neq 0\,.$$

Křivku lze na okolí bodu $[1, 0]$ považovat za část grafu funkce $y = f(x)$, kde

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = -\frac{2 - 2x}{-\mathrm{e}^y - 2}, \qquad f'(1) = 0\,.$$

Tečna t ke grafu $f(x)$ v bodě $[1, 0]$ má rovnici

$$y = 0 + f'(1)(x - 1) = 0\,.$$

Hledaný úhel φ je tedy úhlem, který svírá tečna t s přímkou p.

Další

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

Řešení:

Normálový vektor tečny t je $\vec{n}_t = (0, 1)$, normálový vektor přímky p je $\vec{n}_p = (1, -1)$, celkem tedy

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_t \cdot \vec{n}_p|}{\|\vec{n}_t\| \cdot \|\vec{n}_p\|} = \frac{|1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1|}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 45^\circ \, .$$

Zpět

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

Maple:

Zprvu postupujeme analogicky jako u předchozího příkladu, neboť se jedná o stejnou implicitní funkci:

```
> with(plots):
> F:=(x,y)->2*x-x^2-exp(y)-2*y;
```

$$F := (x,\ y) \to 2\,x - x^2 - e^y - 2\,y$$

```
> F(1,0);
```

$$0$$

```
> diff(F(x,y),y);
```

$$-e^y - 2$$

```
> subs(x=1,y=0,%);
```

$$-e^0 - 2$$

```
> simplify(%);
```

$$-3$$

Ověřili jsme předpoklady věty o implicitní funkci a nyní můžeme počítat $f'(x)$:

```
> implicitdiff(F(x,y),y,x);
```

$$-\frac{2\,(-1 + x)}{e^y + 2}$$

Další

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

Maple:

```
> subs(x=1,y=0,implicitdiff(F(x,y),y,x));
```

$$0$$

Rovnice tečny v bodě [1,0] bude:

```
> y1:=0+(%)*(x-1);
```

$$y1 := 0$$

Normálový vektor přímky t je:

```
> nt:=<0,1>;
```

$$nt := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normálový vektor přímky p je:

```
> np:=<1,-1>;
```

$$np := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Úhel, který tyto dvě přímky svírají, je

```
> with(LinearAlgebra):alfa:=arccos(abs(nt.np)/(Norm(nt,2)*Norm(np,2)));
```

$$alfa := \frac{\pi}{4}$$

Zpět

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

Mathematica:

Zprvu postupujeme analogicky jako u předchozího příkladu, neboť se jedná o stejnou implicitní funkci:

$\boldsymbol{F[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = 2x - x\text{^}2 - \mathrm{Exp}[y] - 2y}$

$-e^y + 2x - x^2 - 2y$

$\boldsymbol{F[1, 0]}$

0

$\boldsymbol{D[F[x, y], y]/.\{x \to 1, y \to 0\}}$

-3

Ověřili jsme předpoklady věty o implicitní funkci a nyní můžeme počítat $f'(x)$:

$\boldsymbol{\mathrm{r1} = D[F[x, y[x]] == 0, x]}$

$2 - 2x - 2y'[x] - e^{y[x]}y'[x] == 0$

$\boldsymbol{\mathrm{der1} = \mathrm{Solve}[\mathrm{r1}, y'[x]]}$

$\left\{\left\{y'[x] \to -\frac{2(-1+x)}{2+e^{y[x]}}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{(\mathrm{der1}/.\{x \to 1\})/.\{y[1] \to 0\}}$

$\{\{y'[1] \to 0\}\}$

Další

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

Mathematica:

Rovnice tečny v bodě [1,0] bude:

$\mathbf{tecna} = \boldsymbol{y} - \mathbf{0} == \mathbf{0}(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})$

$y == 0$

$\mathbf{primka} = \boldsymbol{y} == \boldsymbol{x} - \mathbf{1}$

$y == -1 + x$

Normálový vektor přímky t je:

$\mathbf{nt} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\};$

Normálový vektor přímky p je:

$\mathbf{np} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\};$

Úhel, který tyto dvě přímky svírají, je

$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{ArcCos[Abs[nt.np]/(Norm[nt]Norm[np])]}$

$\frac{\pi}{4}$

Zpět

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x, y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

? Zpět

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x,y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Výsledek:

$T_2(x) = x + 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right)^2$, $\qquad f\left(\frac{\pi}{2} - 0,98\right) \doteq 1,5906\,.$

Zpět

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x,y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Návod:

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2\,, \qquad f(x) \doteq T_2(x)$$

Derivace $f'(x)$ a $f''(x)$ vypočteme pomocí věty o derivaci implicitně zadané funkce.

Zpět

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x,y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Řešení:

Pro ověření existence implicitně definované funkce nejprve vypočteme:

$$F\left(\tfrac{\pi}{2} - 1, \tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{\pi}{2} - \left(\tfrac{\pi}{2} - 1\right) - \sin\tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2} + 1 - 1 = 0\,,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 1 - \cos y\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0\,.$$

Rovnice $F(x,y) = 0$ tedy skutečně na okolí bodu P určuje implicitně funkci $y = f(x)$. Nyní potřebujeme zjistit první a druhou derivaci:

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)} = -\frac{-1}{1 - \cos y}\,, \qquad f'(\tfrac{\pi}{2} - 1) = -\frac{-1}{1} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{0 + \sin y \cdot y'}{(1 - \cos y)^2}\,, \qquad f''(\tfrac{\pi}{2} - 1) = \frac{-1}{1} = -1\,.$$

Další

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x,y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Řešení:

Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ má proto podobu:

$$T_2(x) = \frac{\pi}{2} + \left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right)^2 .$$

Pro přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$ platí

$$f\left(\frac{\pi}{2} - 0,98\right) \doteq T_2\left(\frac{\pi}{2} - 0,98\right) = \frac{\pi}{2} + 0,02 - \frac{1}{2} \cdot 0,02^2 \doteq 1,5906 .$$

Zpět

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x, y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Maple:

```
> F:=(x,y)->y-x-sin (y);
```

$$F := (x,\, y) \to y - x - \sin(y)$$

Nejprve ověříme podmínky existence funkce $y = f(x)$ na okolí daného bodu:

```
> F(Pi/2-1,Pi/2);
```

$$0$$

```
> diff(F(x,y),y);
```

$$1 - \cos(y)$$

```
> subs(x=Pi/2-1,y=Pi/2,%);
```

$$1 - \cos(\frac{\pi}{2})$$

```
> simplify(%);
```

$$1$$

Předpoklady věty o implicitní funkci jsou splněny, platí tedy:

```
> implicitdiff(F(x,y),y,x);
```

$$-\frac{1}{-1 + \cos(y)}$$

Další

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x,y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Maple:

```
> subs(x=Pi/2-1,y=Pi/2,implicitdiff(F(x,y),y,x));
```

$$-\frac{1}{-1+\cos(\frac{\pi}{2})}$$

```
> simplify(%);
```

$$1$$

```
> implicitdiff(F(x,y),y,x$2);
```

$$\frac{\sin(y)}{-1+3\cos(y)-3\cos(y)^2+\cos(y)^3}$$

```
> subs(x=Pi/2-1,y=Pi/2,implicitdiff(F(x,y),y,x$2));
```

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{-1+3\cos(\frac{\pi}{2})-3\cos(\frac{\pi}{2})^2+\cos(\frac{\pi}{2})^3}$$

```
> simplify(%);
```

$$-1$$

Další

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x,y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Maple:

Nyní můžeme zapsat Taylorův polynom:

```
> T2:=Pi/2+(x-Pi/2+1)-1/2*(x-Pi/2+1)^2;
```

$$T2 := x + 1 - \frac{(x - \frac{\pi}{2} + 1)^2}{2}$$

```
> f(Pi/2-0.98):=subs(x=Pi/2-0.98,T2);
```

$$\mathrm{f}(\frac{\pi}{2} - 0.98) := \frac{\pi}{2} + 0.01980000000$$

```
> simplify(%);
```

$$1.590596327$$

Zpět

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x,y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{F[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = y - x - \mathrm{Sin}[y]}$

$-x + y - \mathrm{Sin}[y]$

Nejprve ověříme podmínky existence funkce $y = f(x)$ na okolí daného bodu:

$\boldsymbol{F[\mathrm{Pi}/2 - 1, \mathrm{Pi}/2]}$

0

$\boldsymbol{D[F[x, y], y]/.\{x \to \mathrm{Pi}/2 - 1, y \to \mathrm{Pi}/2\}}$

1

Předpoklady věty o implicitní funkci jsou splněny, platí tedy:

$\boldsymbol{\mathrm{r1} = D[F[x, y[x]] == 0, x]}$

$-1 + y'[x] - \mathrm{Cos}[y[x]]y'[x] == 0$

$\boldsymbol{\mathrm{der1} = \mathrm{Solve}[\mathrm{r1}, y'[x]]}$

$\left\{\left\{y'[x] \to \frac{1}{1 - \mathrm{Cos}[y[x]]}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{(\mathrm{der1}/.\{x \to \mathrm{Pi}/2 - 1\})/.\{y[\mathrm{Pi}/2 - 1] \to \mathrm{Pi}/2\}}$

Další

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x, y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Mathematica:

$\left\{\left\{y'\left[-1 + \frac{\pi}{2}\right] \to 1\right\}\right\}$

r2 = D[F[x, y[x]] == 0, {x, 2}]/.der1

$\left\{\frac{\mathrm{Sin}[y[x]]}{(1-\mathrm{Cos}[y[x]])^2} + y''[x] - \mathrm{Cos}[y[x]]y''[x] == 0\right\}$

der2 = Solve[r2, y"[x]]

$\left\{\left\{y''[x] \to \frac{\mathrm{Sin}[y[x]]}{(-1+\mathrm{Cos}[y[x]])^3}\right\}\right\}$

(der2/.{x → Pi/2 − 1})/.{y[Pi/2 − 1] → Pi/2}

$\left\{\left\{y''\left[-1 + \frac{\pi}{2}\right] \to -1\right\}\right\}$

Nyní můžeme zapsat Taylorův polynom:

T2[x_] = Pi/2 + (x − (Pi/2 − 1)) − 1/2!(x − (Pi/2 − 1))^2

$1 + x - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{2} + x\right)^2$

T2[Pi/2 − 0.98]

1.5906

Zpět

Implicitní funkce více reálných proměnných

- Příklad 8.2.1 Ověřte, zda rovnice $F(x,y,z) = \mathrm{e}^z + x^2y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1,-6,0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x,y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-6)$.
- Příklad 8.2.2 Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y} = 0\,.$
- Příklad 8.2.3 Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1,2,-1]$.
- Příklad 8.2.4 Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0\,.$
- Příklad 8.2.5 Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x,y)$ určené implicitně rovnicí $F(x,y,z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0\,.$
- Příklad 8.2.6 Vypočtěte totální diferenciál $\mathrm{d}T$ pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \dfrac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

Zpět

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x, y, z) = \mathrm{e}^z + x^2y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1, -6, 0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x, y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -6)$.

? Zpět

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x, y, z) = \mathrm{e}^z + x^2 y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1, -6, 0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x, y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -6)$.

Výsledek:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -6) = -\frac{1}{8}\,.$$

Zpět

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x,y,z) = \mathrm{e}^z + x^2 y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1,-6,0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x,y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-6)$.

Návod:

Ověříme podmínky věty o existenci implicitní funkce:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad F(1,-6,0) = 0 \ , \\
&2) \quad \frac{\partial F}{\partial z}(1,-6,0) \neq 0 \ .
\end{aligned}
$$

a vypočteme první parciální derivace podle věty o derivaci implicitní funkce:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} \ , \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} \qquad \text{pro} \quad x \in (1-\delta_x, 1+\delta_x) \ , \ y \in (-6-\delta_y, -6+\delta_y) \ .
\end{aligned}
$$

Druhé derivace spočteme např. derivací předcházejících vztahů.

Zpět

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x,y,z) = \mathrm{e}^z + x^2y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1,-6,0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x,y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-6)$.

Řešení:

Pro ověření existence implicitně definované funkce potřebujeme vypočítat:

$$F(1,-6,0) = \mathrm{e}^0 + 1\cdot(-6) + 0 + 5 = 0\,,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \mathrm{e}^z + 1\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(1,-6,0) = 2 \neq 0\,.$$

Rovnice $F(x,y,z) = 0$ tedy skutečně na okolí bodu $[1,-6,0]$ určuje implicitně funkci $z = f(x,y)$. Nyní můžeme přistoupit k výpočtu parciálních derivací:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} = -\frac{x^2}{\mathrm{e}^z + 1}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,-6) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{0 - x^2\mathrm{e}^z\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{(\mathrm{e}^z+1)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-6) = -\frac{0-(-\frac{1}{2})}{4} = -\frac{1}{8}\,.$$

Hledaná parciální derivace je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-6) = -\frac{1}{8}\,.$$

Další

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x, y, z) = \mathrm{e}^z + x^2y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1, -6, 0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x, y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -6)$.

Řešení:

Zjistili jsme, že v bodě A je funkce $y = f(x)$ klesající ($y'(-1) < 0$) a konvexní ($y''(-1) > 0$). Přesvědčit se o tom můžeme např. pomocí programu Maple, jak uvidíme dále.

Zpět

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x, y, z) = \mathrm{e}^z + x^2 y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1, -6, 0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x, y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -6)$.

Maple:

```
> F:=(x,y,z)->exp(z)+x^2*y+z+5;
```

$$F := (x,\ y,\ z) \rightarrow e^z + x^2\, y + z + 5$$

Nejprve ověříme podmínky pro existenci funkce $z = f(x, y)$ na okolí bodu [1,-6,0]:

```
> F(1,-6,0);
```

$$0$$

```
> diff(F(x,y,z),z);
```

$$e^z + 1$$

```
> subs(x=1,y=-6,z=0,%);
```

$$e^0 + 1$$

```
> simplify(%);
```

$$2$$

Nyní můžeme počítat příslušné parciální derivace:

```
> implicitdiff(F(x,y,z),z,y);
```

$$-\frac{x^2}{e^z + 1}$$

Další

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x,y,z) = \mathrm{e}^z + x^2 y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1, -6, 0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x,y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-6)$.

Maple:

```
> dzdy:=simplify(subs(x=1,y=-6,z=0,implicitdiff(F(x,y,z),z,y)));
```

$$dzdy := \frac{-1}{2}$$

```
> implicitdiff(F(x,y,z),z,y$2);
```

$$-\frac{x^4\, e^z}{(e^z)^3 + 3\,(e^z)^2 + 3\,e^z + 1}$$

```
> subs(x=1,y=-6,z=0,implicitdiff(F(x,y,z),z,y$2));
```

$$-\frac{e^0}{(e^0)^3 + 3\,(e^0)^2 + 3\,e^0 + 1}$$

```
> dzdydy:=simplify(%);
```

$$dzdydy := \frac{-1}{8}$$

Zpět

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x,y,z) = \mathrm{e}^z + x^2y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1,-6,0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x,y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-6)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{F[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}, \mathrm{z\_}] = \mathrm{Exp}[z] + x\hat{}2 * y + z + 5}$

$5 + e^z + x^2 y + z$

Nejprve ověříme podmínky pro existenci funkce $z = z(x,y)$ na okolí bodu [1,-6,0]:

$\boldsymbol{F[1,-6,0]}$

0

$\boldsymbol{D[F[x,y,z],z]/.\{x \to 1, y \to -6, z \to 0\}}$

2

Nyní můžeme počítat příslušné parciální derivace:

$\boldsymbol{\mathrm{r1} = D[F[x,y,z[x,y]] == 0, y]}$

$x^2 + z^{(0,1)}[x,y] + e^{z[x,y]} z^{(0,1)}[x,y] == 0$

$\boldsymbol{\mathrm{der1} = \mathrm{Solve}\left[\mathrm{r1}, z^{(0,1)}[x,y]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(0,1)}[x,y] \to -\frac{x^2}{1+e^{z[x,y]}}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{(\mathrm{der1}/.\{x \to 1, y \to -6\})/.\{z[1,-6] \to 0\}}$

$\left\{\left\{z^{(0,1)}[1,-6] \to -\frac{1}{2}\right\}\right\}$

Další

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x, y, z) = \mathrm{e}^z + x^2 y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1, -6, 0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x, y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -6)$.

Mathematica:

r2 = $\boldsymbol{D[F[x, y, z[x, y]] == 0, \{y, 2\}]}$/.der1

$$\left\{\frac{e^{z[x,y]}x^4}{\left(1+e^{z[x,y]}\right)^2} + z^{(0,2)}[x, y] + e^{z[x,y]}z^{(0,2)}[x, y] == 0\right\}$$

der2 = Solve $\left[\mathbf{r2}, \boldsymbol{z^{(0,2)}[x, y]}\right]$

$$\left\{\left\{z^{(0,2)}[x, y] \to -\frac{e^{z[x,y]}x^4}{\left(1+e^{z[x,y]}\right)^3}\right\}\right\}$$

(der2/.$\boldsymbol{\{x \to 1, y \to -6\}}$)/.$\boldsymbol{\{z[1, -6] \to 0\}}$

$$\left\{\left\{z^{(0,2)}[1, -6] \to -\tfrac{1}{8}\right\}\right\}$$

Zpět

Příklad 8.2.2

Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí $\dfrac{x}{z} - \ln \dfrac{z}{y} = 0\,.$

? Zpět

Příklad 8.2.2

Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí $\dfrac{x}{z} - \ln \dfrac{z}{y} = 0$.

Výsledek:

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{z_0}{x_0 + z_0}\,\mathrm{d}x + \frac{z_0^2}{y_0(x_0 + z_0)}\,\mathrm{d}y\,.$$

Zpět

Příklad 8.2.2

Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí $\dfrac{x}{z} - \ln \dfrac{z}{y} = 0$.

Návod:

Totálním diferenciálem funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ rozumíme formu:

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\mathrm{d}y\,.$$

Zpět

Příklad 8.2.2

Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí $\dfrac{x}{z} - \ln \dfrac{z}{y} = 0$.

Řešení:

Předpokládejme, že funkce $z = f(x, y)$ je definována na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně rovnicí

$$F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0 .$$

Potom platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{\dfrac{1}{z_0}}{-\dfrac{x_0}{z_0^2} - \dfrac{1}{z_0}} = \frac{z_0}{x_0 + z_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{\dfrac{1}{y_0}}{-\dfrac{x_0}{z_0^2} - \dfrac{1}{z_0}} = \frac{z_0^2}{y_0(x_0 + z_0)} .$$

Celkově tedy pro totální diferenciál funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ dostaneme:

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{z_0}{x_0 + z_0}\mathrm{d}x + \frac{z_0^2}{y_0(x_0 + z_0)}\mathrm{d}y .$$

Zpět

Příklad 8.2.2

Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y} = 0$.

Maple:

Předpokládejme, že funkce $z = f(x, y)$ je definována na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně danou rovnicí:

```
> F:=(x,y,z)->x/z-ln (z/y);
```

$$F := (x,\ y,\ z) \to \frac{x}{z} - \ln(\frac{z}{y})$$

Pro výpočet totálního diferenciálu potřebujeme znát příslušné parciální derivace:

```
> implicitdiff(F(x,y,z),z,x);
```

$$\frac{z}{x+z}$$

```
> dzdx:=simplify(subs(x=x_0,y=y_0,z=z_0,implicitdiff(F(x,y,z),z,x)));
```

$$dzdx := \frac{z\_0}{x\_0 + z\_0}$$

```
> implicitdiff(F(x,y,z),z,y);
```

$$\frac{z^2}{y\,(x+z)}$$

```
> subs(x=x_0,y=y_0,z=z_0,implicitdiff(F(x,y,z),z,y));
```

$$\frac{z\_0^2}{y\_0\,(x\_0 + z\_0)}$$

Další

Příklad 8.2.2

Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí $\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y} = 0$.

Maple:

```
>  dzdy:=simplify(%);
```

$$dzdy := \frac{z\_0^2}{y\_0\,(x\_0 + z\_0)}$$

Nyní už zbývá jen sestavit příslušnou diferenciální formu:

```
>  df:= dzdx * dx+dzdy * dy;
```

$$df := \frac{z\_0\ dx}{x\_0 + z\_0} + \frac{z\_0^2\ dy}{y\_0\,(x\_0 + z\_0)}$$

Zpět

Příklad 8.2.2

Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí $\dfrac{x}{z} - \ln \dfrac{z}{y} = 0$.

Mathematica:

Předpokládejme, že funkce $z = z(x, y)$ je definována na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně danou rovnicí:

F[x_, y_, z_] = x/z − Log[z/y]

$$\frac{x}{z} - \mathrm{Log}\left[\frac{z}{y}\right]$$

Pro výpočet totálního diferenciálu potřebujeme znát příslušné parciální derivace:

rx = D[F[x, y, z[x, y]] == 0, x]

$$\frac{1}{z[x,y]} - \frac{x\, z^{(1,0)}[x,y]}{z[x,y]^2} - \frac{z^{(1,0)}[x,y]}{z[x,y]} == 0$$

derx = Solve$\left[\mathbf{rx}, z^{(1,0)}[x, y]\right]$

$$\left\{\left\{z^{(1,0)}[x, y] \to \frac{z[x,y]}{x+z[x,y]}\right\}\right\}$$

(derx/.{x → x0, y → y0})

$$\left\{\left\{z^{(1,0)}[\mathrm{x0}, \mathrm{y0}] \to \frac{z[\mathrm{x0},\mathrm{y0}]}{\mathrm{x0}+z[\mathrm{x0},\mathrm{y0}]}\right\}\right\}$$

ry = D[F[x, y, z[x, y]] == 0, y]

$$-\frac{x\, z^{(0,1)}[x,y]}{z[x,y]^2} - \frac{y\left(-\frac{z[x,y]}{y^2} + \frac{z^{(0,1)}[x,y]}{y}\right)}{z[x,y]} == 0$$

Další

Příklad 8.2.2

Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y} = 0$.

Mathematica:

$$\mathbf{dery = Solve}\left[\mathbf{ry}, \boldsymbol{z}^{(\mathbf{0,1})}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]\right]$$

$$\left\{\left\{z^{(0,1)}[x, y] \to \frac{z[x,y]^2}{y(x+z[x,y])}\right\}\right\}$$

$$\mathbf{(dery/.\{\boldsymbol{x} \to x0, \boldsymbol{y} \to y0\})}$$

$$\left\{\left\{z^{(0,1)}[\mathrm{x0}, \mathrm{y0}] \to \frac{z[\mathrm{x0},\mathrm{y0}]^2}{\mathrm{y0}(\mathrm{x0}+z[\mathrm{x0},\mathrm{y0}])}\right\}\right\}$$

Nyní už zbývá jen sestavit příslušnou diferenciální formu:

df==derx[[1]][[1]][[2]]dx + dery[[1]][[1]][[2]]dy

$$\mathrm{df} == \frac{\mathrm{dx}\,z[x,y]}{x+z[x,y]} + \frac{\mathrm{dy}\,z[x,y]^2}{y(x+z[x,y])}$$

Zpět

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

? Zpět

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

Výsledek:

$x + 11y + 5z = 18\,.$

Zpět

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

Návod:

Tečná rovina v bodě $T = [x_0, y_0, z_0]$ ke grafu funkce $f(x, y)$ má rovnici:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\,.$$

Příslušné parciální derivace počítáme jako derivace funkce dané implicitně.

Zpět

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

Řešení:

Bod T leží na ploše určené rovnicí

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0\,,$$

neboť
$$F(1, 2, -1) = 1^3 + 2^3 + (-1)^3 - 2 - 6 = 0\,.$$

Dále platí

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 + xy\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(1, 2, -1) = 3(-1)^2 + 2 = 5 \neq 0\,,$$

takže rovnice na okolí bodu T určuje implicitně definovanou funkci $f(x, y)$, pro kterou dostáváme:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{3x^2 + yz}{3z^2 + xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{3 - 2}{3 + 2} = -\frac{1}{5}\,,$$

Další

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{3y^2 + xz}{3z^2 + xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = -\frac{12 - 1}{3 + 2} = -\frac{11}{5}\,.$$

Rovnice tečné roviny v bodě $T = [1, 2, -1]$ má tvar

$$z = -1 - \frac{1}{5}(x - 1) - \frac{11}{5}(y - 2)\,,$$

tj.

$$x + 11y + 5z = 18\,.$$

Zpět

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

Maple:

```
> F:=(x,y,z)->x^3+y^3+z^3+x*y*z-6;
```

$$F := (x, y, z) \to x^3 + y^3 + z^3 + x\,y\,z - 6$$

```
> F(1,2,-1);
```

$$0$$

```
> diff(F(x,y,z),z);
```

$$3\,z^2 + x\,y$$

```
> subs(x=1,y=2,z=-1,%);
```

$$5$$

Ověřili jsme, že daná rovnice definuje v okolí bodu T funkci $z = f(x, y)$.
Nyní můžeme počítat příslušné parciální derivace:

```
> implicitdiff(F(x,y,z),z,x);
```

$$-\frac{3\,x^2 + z\,y}{3\,z^2 + x\,y}$$

```
> dzdx:=simplify(subs(x=1,y=2,z=-1,implicitdiff(F(x,y,z),z,x)));
```

$$dzdx := \frac{-1}{5}$$

```
> implicitdiff(F(x,y,z),z,y);
```

$$-\frac{3\,y^2 + x\,z}{3\,z^2 + x\,y}$$

Další

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

Maple:

```
> dzdy:=subs(x=1,y=2,z=-1,implicitdiff(F(x,y,z),z,y));
```

$$dzdy := \frac{-11}{5}$$

Nyní sestrojíme tečnou rovinu:

```
> z:= -1+dzdx* (x-1) +dzdy * (y-2);
```

$$z := \frac{18}{5} - \frac{x}{5} - \frac{11\,y}{5}$$

Zpět

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

Mathematica:

$\boldsymbol{F[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}, \mathrm{z\_}] = x\hat{}3 + y\hat{}3 + z\hat{}3 + xyz - 6}$

$-6 + x^3 + y^3 + xyz + z^3$

$\boldsymbol{F[1, 2, -1]}$

0

$\boldsymbol{D[F[x, y, z], z]/.\{x \to 1, y \to 2, z \to -1\}}$

5

Ověřili jsme, že daná rovnice definuje v okolí bodu T funkci $z = f(x, y)$.
Nyní můžeme počítat příslušné parciální derivace:

$\boldsymbol{\mathrm{rx} = D[F[x, y, z[x, y]] == 0, x]}$

$3x^2 + yz[x, y] + xyz^{(1,0)}[x, y] + 3z[x, y]^2 z^{(1,0)}[x, y] == 0$

$\boldsymbol{\mathrm{derx} = \mathrm{Solve}\left[\mathrm{rx}, z^{(1,0)}[x, y]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(1,0)}[x, y] \to \frac{-3x^2 - yz[x,y]}{xy + 3z[x,y]^2}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{\mathrm{der1} = \mathrm{derx}/.\{x \to 1, y \to 2\}/.\{z[1, 2] \to -1\}}$

$\left\{\left\{z^{(1,0)}[1, 2] \to -\frac{1}{5}\right\}\right\}$

Další

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

Mathematica:

$\mathbf{ry = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]] == 0, \boldsymbol{y}]}$

$3y^2 + xz[x, y] + xyz^{(0,1)}[x, y] + 3z[x, y]^2 z^{(0,1)}[x, y] == 0$

$\mathbf{dery = Solve}\left[\mathbf{ry}, \boldsymbol{z}^{(0,1)}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]\right]$

$\left\{\left\{z^{(0,1)}[x, y] \to \frac{-3y^2 - xz[x,y]}{xy + 3z[x,y]^2}\right\}\right\}$

$\mathbf{der2 = dery/.\{\boldsymbol{x} \to 1, \boldsymbol{y} \to 2\}/.\{\boldsymbol{z}[1, 2] \to -1\}}$

$\left\{\left\{z^{(0,1)}[1, 2] \to -\frac{11}{5}\right\}\right\}$

Nyní sestrojíme tečnou rovinu:

$\mathbf{TecnaRov = \boldsymbol{z} - (-1) == der1[[1]][[1]][[2]](\boldsymbol{x} - 1) + der2[[1]][[1]][[2]](\boldsymbol{y} - 2)}$

$1 + z == \frac{1-x}{5} - \frac{11}{5}(-2 + y)$

Simplify[%]

$x + 11y + 5z == 18$

Zpět

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0$.

? Zpět

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0$.

Výsledek:

$f(0,98;1,02) \doteq 1,005$.

Zpět

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0$.

Návod:

Pro aproximaci pomocí totálního diferenciálu platí

$$f(x,y) \doteq f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\,.$$

Zpět

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0$.

Řešení:

Pro výpočet hledané funkční hodnoty musíme zvolit bod $[1,1,1]$. Dosadíme-li $x = 1$ a $y = 1$ do rovnice $x + y - z^3 - xz = 0$, dostaneme rovnici $2 - z^3 - z = 0$. Tato rovnice má jediné reálné řešení $z = 1$ (ověřte si to graficky, nebo vydělte rovnici členem $(z-1)$).
Nyní ověříme, že v okolí tohoto bodu rovnice $F(x,y,z) = 0$ určuje jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x,y)$:

$$F(1,1,1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = -3z^2 - x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = -3 - 1 = -4 \neq 0\,.$$

Nyní přistoupíme k výpočtu parciálních derivací:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} = -\frac{1-z}{-3z^2-x}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} = -\frac{1}{-3z^2-x}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}\,.$$

Další

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z=f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z)=x+y-z^3-xz=0$.

Řešení:

Pro totální diferenciál funkce $f(x,y)$ v bodě $[1,1]$ platí

$$\mathrm{d}f(1,1)=\frac{1}{4}\mathrm{d}y\,,$$

pro přibližnou hodnotu $f(0,98;1,02)$ odtud plyne

$$f(0,98;1,02)\doteq f(1,1)+\mathrm{d}f(1,1)=1+\frac{1}{4}\cdot 0,02=1,005\,.$$

Zpět

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0$.

Maple:

```
> F:=(x,y,z)->x+y-z^3-x*z;
```

$$F := (x,\ y,\ z) \to x + y - z^3 - x\,z$$

Nejprve ověříme podmínky existence funkce $z = f(x,y)$ na okolí bodu [1,1,1]:

```
> F(1,1,1);
```

$$0$$

```
> diff(F(x,y,z),z);
```

$$-3\,z^2 - x$$

```
> subs(x=1,y=1,z=1,%);
```

$$-4$$

Nyní vypočteme parciální derivace funkce f v bodě [1,1]:

```
> dfdx:=implicitdiff(F(x,y,z),z,x);
```

$$dfdx := -\frac{-1 + z}{3\,z^2 + x}$$

```
> dfdx1:=subs(x=1,y=1,z=1,dfdx);
```

$$dfdx1 := 0$$

```
> dfdy:=implicitdiff(F(x,y,z),z,y);
```

$$dfdy := \frac{1}{3\,z^2 + x}$$

Další

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z=f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z)=x+y-z^3-xz=0$.

Maple:

```
> dfdy1:=subs(x=1,y=1,z=1,dfdy);
```

$$dfdy1 := \frac{1}{4}$$

Pomocí parciálních derivací zapíšeme formuli pro totální diferenciál:

```
> tot_dif:=dfdx1*dx+dfdy1*dy;
```

$$tot\_dif := \frac{dy}{4}$$

Zbývá dosadit hodnoty přírůstků dx a dy:

```
> dx:=-0.02:dy:=0.02: f(0.98,1.02):=1+tot_dif;
```

$$\mathrm{f}(0.98,\ 1.02) := 1.005000000$$

Zpět

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0$.

Mathematica:

$\boldsymbol{F[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}, \mathrm{z\_}] = x + y - z\hat{\ }3 - xz}$

$x + y - xz - z^3$

Nejprve ověříme podmínky existence funkce $z = f(x,y)$ na okolí bodu [1,1,1]:

$\boldsymbol{F[1,1,1]}$

0

$\boldsymbol{D[F[x,y,z],z]/.\{x \to 1, y \to 1, z \to 1\}}$

-4

Nyní vypočteme parciální derivace funkce f v bodě [1,1]:

$\boldsymbol{\mathrm{rx} = D[F[x,y,z[x,y]] == 0, x]}$

$1 - z[x,y] - xz^{(1,0)}[x,y] - 3z[x,y]^2 z^{(1,0)}[x,y] == 0$

$\boldsymbol{\mathrm{derx} = \mathrm{Solve}\left[\mathrm{rx}, z^{(1,0)}[x,y]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(1,0)}[x,y] \to \frac{1 - z[x,y]}{x + 3z[x,y]^2}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{\mathrm{der1} = \mathrm{derx}/.\{x \to 1, y \to 1\}/.\{z[1,1] \to 1\}}$

$\left\{\left\{z^{(1,0)}[1,1] \to 0\right\}\right\}$

Další

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0$.

Mathematica:

$\mathbf{ry = D[F[x, y, z[x, y]] == 0, y]}$

$1 - xz^{(0,1)}[x,y] - 3z[x,y]^2 z^{(0,1)}[x,y] == 0$

$\mathbf{dery = Solve\left[ry, z^{(0,1)}[x, y]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(0,1)}[x,y] \to \frac{1}{x+3z[x,y]^2}\right\}\right\}$

$\mathbf{der2 = dery/.\{x \to 1, y \to 1\}/.\{z[1, 1] \to 1\}}$

$\left\{\left\{z^{(0,1)}[1,1] \to \frac{1}{4}\right\}\right\}$

Pomocí parciálních derivací zapíšeme formuli pro totální diferenciál

df[dx_, dy_] = 0dx + 1/4dy

$\frac{\mathrm{dy}}{4}$

Zbývá dosadit hodnoty přírůstků dx a dy:

df[0.98 − 1, 1.02 − 1]

0.005

f_priblizna = 1 + df[0.98 − 1, 1.02 − 1]

1.005

Zpět

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí
$F(x, y, z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

? Zpět

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí
$F(x, y, z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0\,.$

Výsledek:

Lokální maximum $f(1, 0) = 1\,.$

Zpět

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí
$F(x, y, z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0\,.$

Návod:

Najdeme stacionární body a pomocí Hessiánu se pokusíme rozhodnout, zda se jedná o body lokálních extrémů.

Zpět

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí
$F(x, y, z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

Řešení:

Stacionární body vyhovují nutné podmínce pro lokální extrém

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,,$$

tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2 - 2x}{-1} = 2 - 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-8y}{-1} = -8y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0\,.$$

Zjistili jsme jediný stacionární bod $[1, 0]$. Vypočteme nyní druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8$$

Další

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí
$F(x, y, z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

Řešení:

a Hessián v bodě $[1, 0]$:

$$\det H_f(1,0) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 16 > 0\,.$$

Funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $[1, 0]$ lokální extrém, vzhledem ke znaménku
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = -2 < 0$ jde o ostré lokální maximum s funkční hodnotou $z = 1$.

Zpět

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

Maple:

```
> F:=(x,y,z)->2*x-x^2-4*y^2-z;
```

$$F := (x,\ y,\ z) \to 2\,x - x^2 - 4\,y^2 - z$$

Nejprve najdeme stacionární body:

```
> dfdx:=implicitdiff(F(x,y,z),z,x);
```

$$dfdx := 2 - 2\,x$$

```
> dfdy:=implicitdiff(F(x,y,z),z,y);
```

$$dfdy := -8\,y$$

```
> solve({dfdx=0,dfdy=0});
```

$$\{y = 0,\ x = 1\}$$

Máme jediný stacionární bod - bod [1,0]. Vypočteme příslušný Hessián:

```
> fxx:=implicitdiff(F(x,y,z),z,x$2);
```

$$fxx := -2$$

```
> fxy:=implicitdiff(F(x,y,z),z,x,y);
```

$$fxy := 0$$

```
> fyy:=implicitdiff(F(x,y,z),z,y$2);
```

$$fyy := -8$$

Další

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

Maple:

```
> H_f:=matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]);
```

$$H\_f := \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg):
> det(H_f);
```

$$16$$

V daném bodě je lokální extrém, dále je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) < 0$, takže se jedná o ostré lokální maximum, jehož funkční hodnota je

```
> f10:=solve(2*1-1^2-4*0^2-z=0);
```

$$f10 := 1$$

Zpět

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí
$F(x, y, z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

Mathematica:

$\boldsymbol{F[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}, \mathrm{z\_}] = 2x - x\hat{}2 - 4y\hat{}2 - z}$

$2x - x^2 - 4y^2 - z$

Nejprve najdeme stacionární body:
Výpočet $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\boldsymbol{\mathrm{rx} = D[F[x, y, z[x, y]] == 0, x]}$

$2 - 2x - z^{(1,0)}[x, y] == 0$

$\boldsymbol{\mathrm{derx} = \mathrm{Solve}\left[\mathrm{rx}, z^{(1,0)}[x, y]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(1,0)}[x, y] \to -2(-1 + x)\right\}\right\}$

Výpočet $\frac{\partial f}{\partial y}$

$\boldsymbol{\mathrm{ry} = D[F[x, y, z[x, y]] == 0, y]}$

$-8y - z^{(0,1)}[x, y] == 0$

$\boldsymbol{\mathrm{dery} = \mathrm{Solve}\left[\mathrm{ry}, z^{(0,1)}[x, y]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(0,1)}[x, y] \to -8y\right\}\right\}$

Další

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x,y)$ určené implicitně rovnicí
$F(x,y,z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

Mathematica:

Určení stacionárních bodů:

$\mathbf{Solve[\{2 - 2\boldsymbol{x} == 0, -8\boldsymbol{y} == 0\}, \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}]}$

$\{\{x \to 1, y \to 0\}\}$

Máme jediný stacionární bod - bod [1,0]. Vypočteme příslušný Hessián. Výpočet $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}$

$\mathbf{rxx = \boldsymbol{D}[rx, \boldsymbol{x}]}$

$-2 - z^{(2,0)}[x, y] == 0$

$\mathbf{derxx = Solve\left[rxx, \boldsymbol{z}^{(2,0)}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(2,0)}[x, y] \to -2\right\}\right\}$

Výpočet $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}$

$\mathbf{rxy = \boldsymbol{D}[rx, \boldsymbol{y}]}$

$-z^{(1,1)}[x, y] == 0$

$\mathbf{derxy = Solve\left[rxy, \boldsymbol{z}^{(1,1)}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(1,1)}[x, y] \to 0\right\}\right\}$

Další

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí
$F(x, y, z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

Mathematica:

Výpočet $\frac{\partial f^2}{\partial y^2}$

$\mathbf{ryy = \boldsymbol{D}[ry, \boldsymbol{y}]}$

$-8 - z^{(0,2)}[x, y] == 0$

$\mathbf{deryy = Solve\left[ryy, \boldsymbol{z}^{(0,2)}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(0,2)}[x, y] \to -8\right\}\right\}$

$\mathbf{Hf = \{\{-2, 0\}, \{0, -8\}\}}$

$\{\{-2, 0\}, \{0, -8\}\}$

$\mathbf{Det[Hf]}$

16

V daném bodě je lokální extrém, dále je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) < 0$, takže se jedná o ostré lokální maximum, jehož funkční hodnota je

$\mathbf{Solve[\boldsymbol{F}[1, 0, \boldsymbol{z}] == 0, \boldsymbol{z}]}$

$\{\{z \to 1\}\}$

Zpět

Příklad 8.2.6

Vypočtěte totální diferenciál dT pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \dfrac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

? Zpět

Příklad 8.2.6

Vypočtěte totální diferenciál dT pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \frac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

Výsledek:

$$\mathrm{d}T = \frac{\left(V - b + \frac{a}{R}T^{-\frac{3}{2}}\right)\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}V}{R + \frac{3}{2}p\frac{a}{R}T^{-\frac{5}{2}}}\,.$$

Zpět

Příklad 8.2.6

Vypočtěte totální diferenciál dT pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \dfrac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

Návod:

$$\mathrm{d}T = \frac{\partial T}{\partial p}\,\mathrm{d}p + \frac{\partial T}{\partial V}\,\mathrm{d}V$$

Zpět

Příklad 8.2.6

Vypočtěte totální diferenciál dT pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \frac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

Řešení:

Danou stavovou rovnicí je teplota T zadána jako implicitní funkce tlaku a objemu, tj. $T = T(p, V)$, pro totální diferenciál teploty tedy platí

$$\mathrm{d}T = \frac{\partial T}{\partial p}\,\mathrm{d}p + \frac{\partial T}{\partial V}\,\mathrm{d}V.$$

Příslušné parciální derivace vypočteme pomocí věty o implicitní funkci. Označme

$$F(p, V, T) = pV - RT - p\left(b - \frac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right) = 0\,,$$

potom

$$\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial T}} = -\frac{V - \left(b - \frac{a}{R}T^{-\frac{3}{2}}\right)}{-R - \frac{3}{2}\frac{pa}{R}\cdot T^{-\frac{5}{2}}}\,,$$

Další

Příklad 8.2.6

Vypočtěte totální diferenciál dT pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \frac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

Řešení:

$$\frac{\partial T}{\partial V} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial V}}{\frac{\partial F}{\partial T}} = -\frac{p}{-R - \frac{3}{2}\frac{pa}{R} \cdot T^{-\frac{5}{2}}}\,.$$

Celkem dostáváme

$$\mathrm{d}T = \frac{\left(V - b + \frac{a}{R}T^{-\frac{3}{2}}\right)\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}V}{R + \frac{3}{2}p\frac{a}{R}T^{-\frac{5}{2}}}\,.$$

Zpět

Příklad 8.2.6

Vypočtěte totální diferenciál dT pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \frac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

Maple:

Nejprve zavedeme potřebné označení:

```
> F:=(p,V,T)->p*V-R*T-p*(b-a/(R*T^(3/2)));
```

$$F := (p,\, V,\, T) \to p\, V - R\, T - p\, (b - \frac{a}{R\, T^{(3/2)}})$$

A dále počítáme příslušné parciální derivace $T(p, V)$:

```
> dTdp:=implicitdiff(F(p,V,T),T,p);
```

$$dTdp := \frac{2\, (V\, R\, T^{(5/2)} - b\, R\, T^{(5/2)} + a\, T)}{2\, R^2\, T^{(5/2)} + 3\, p\, a}$$

```
> dTdV:=implicitdiff(F(p,V,T),T,V);
```

$$dTdV := \frac{2\, p\, R\, T^{(5/2)}}{2\, R^2\, T^{(5/2)} + 3\, p\, a}$$

Na závěr dosadíme do formule totálního diferenciálu:

```
> dT:=dTdp*dp+dTdV*dV;
```

$$dT := \frac{2\, (V\, R\, T^{(5/2)} - b\, R\, T^{(5/2)} + a\, T)\, dp}{2\, R^2\, T^{(5/2)} + 3\, p\, a} + \frac{2\, p\, R\, T^{(5/2)}\, dV}{2\, R^2\, T^{(5/2)} + 3\, p\, a}$$

Zpět

Příklad 8.2.6

Vypočtěte totální diferenciál dT pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \frac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

Mathematica:

Nejprve zavedeme potřebné označení:

F[p_, V_, T_] = pV − RT − p(b − a/(RT^(3/2)))

$$-p\left(b - \frac{a}{RT^{3/2}}\right) - RT + pV$$

A dále počítáme příslušné parciální derivace $T(p, V)$:

rp = D[F[p, V, T[p, V]] == 0, p]

$$-b + V + \frac{a}{RT[p,V]^{3/2}} - RT^{(1,0)}[p, V] - \frac{3apT^{(1,0)}[p,V]}{2RT[p,V]^{5/2}} == 0$$

derp = Solve [rp, $T^{(1,0)}$[p, V]]

$$\left\{\left\{T^{(1,0)}[p, V] \to -\frac{2T[p,V]\left(-a+bRT[p,V]^{3/2}-RVT[p,V]^{3/2}\right)}{3ap+2R^2T[p,V]^{5/2}}\right\}\right\}$$

rV = D[F[p, V, T[p, V]] == 0, V]

$$p - RT^{(0,1)}[p, V] - \frac{3apT^{(0,1)}[p,V]}{2RT[p,V]^{5/2}} == 0$$

Další

Příklad 8.2.6

Vypočtěte totální diferenciál dT pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \dfrac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

Mathematica:

$$\mathbf{derV = Solve\left[rV, \boldsymbol{T^{(0,1)}[p, V]}\right]}$$

$$\left\{\left\{T^{(0,1)}[p, V] \to -\frac{2pRT[p,V]^{5/2}}{-3ap-2R^2T[p,V]^{5/2}}\right\}\right\}$$

Na závěr dosadíme do formule totálního diferenciálu:

$$\mathbf{dT = Simplify[derp[[1]][[1]][[2]]dp + derV[[1]][[1]][[2]]dV/.\{\boldsymbol{T[p, V]} \to \boldsymbol{T}\}]}$$

$$\frac{2\left(a\mathrm{dp}T+RT^{5/2}(-b\mathrm{dp}+\mathrm{dV}p+\mathrm{dp}V)\right)}{3ap+2R^2T^{5/2}}$$

Zpět