Kapitola 10

Plošný integrál vektorového pole

1 Definice a výpočet

Motivací pro definici plošného integrálu vektorového pole byla řada problémů v přírodních vědách – především v teorii pole a proudění. Tento integrál je variací plošného integrálu ze skalární funkce a představuje jistou analogii ke křivkovému integrálu vektorového pole.

K definici plošného integrálu vektorového pole budeme potřebovat pojem normálového pole k dané ploše. Představme si nejdříve, že M je elementární plocha daná grafem funkce g na základní oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$. Připomeňme, že normálový vektor ke grafu funkce g v bodě $(x, y, g(x, y))$ je definován jako jeden z kolmých vektorů k tečné rovině ke grafu funkce g, tj. jako jistý násobek vektoru

$$(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1).$$

V každém bodě $(x, y, g(x, y))$ plochy M tak máme definovány právě dva jednotkové normálové vektory, které jsou opačně orientovány

$$\frac{\left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)^2}} \quad \text{a} \quad -\frac{\left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)^2}}.$$

Můžeme tedy zavést následující pojem.

Definice 10.1. *Nechť M je elementární plocha.* **Jednotkové normálové vektorové pole** *$\vec{n}$ plochy M je spojité vektorové pole, které každému bodu $(x, y, z) \in M \setminus K(M)$ přiřadí jednotkový normálový vektor $\vec{n}(x, y, z)$ k ploše M v bodě (x, y, z).*

Z předchozí diskuse vyplývá, že každá standardní plocha má právě dvě jednotková normálová pole s navzájem opačnou orientací.

Příklad 10.2. Nechť M je elementární plocha daná podmínkami:

$$z = x^2 - y^2, \quad 0 \leq x, y \leq 1.$$

Uvedená plocha má dvě jednotková normálová pole

$$\vec{n}_1 = \frac{(2x, -2y, -1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \qquad \vec{n}_2 = -\frac{(2x, -2y, -1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Konkrétní volbou jednotkového normálové pole vlastně volíme jednu ze dvou možných stran elementární plochy. Říkáme proto, že jednotkové normálové pole určuje její *orientaci.* V případě obecné plochy je orientace dána orientací elementárních ploch, které tvoří její rozklad. Povrch krychle můžeme například vyjádřit jako sjednocení šesti stěn a orientaci této plochy můžeme chápat jako nezávislý výběr „vnějších“ nebo „vnitřních“ stran u každé z hraničních stěn. Následující definice je formálním vyjádřením této představy.

Definice 10.3. *Nechť M je elementární plocha. Dvojice $(M) = (M, \vec{n})$, kde $\vec{n}$ je jednotkové normálové pole plochy M se nazývá* **elementární orientovaná plocha**.

Nechť M je plocha s rozkladem $\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ na elementární plochy. Množina elementárních orientovaných ploch $(M) = \{(M_1, \vec{n_1}), (M_2, \vec{n_2}), \dots, (M_n \vec{n_k})\}$ se nazývá **orientovaná plocha**.

I když orientace elementární plochy jsou právě dvě, orientací obecné plochy je více. Záleží na tom, jakým způsobem si plochu M rozložíme a jaké orientace zvolíme na jednotlivých částech. V matematice se studují objekty, které jsou mnohem obecnější než elementární plochy, tzv. *variety.* V tomto jazyce je elementární plocha dvourozměrná varieta v $\mathbb{R}^3$. Zatímco elementární plocha má vždy orientaci (tj. spojité jednotkové normálové pole), varieta orientaci mít nemusí. Příkladem je známý Möbiův list, což je plocha kterou je možnou vymodelovat z proužku listu papíru otočením jedné strany o 180 stupňů a slepením. Möbiův list má pouze jednu stranu.

V případě, kdy je orientovaná plocha M hranicí základního tělesa P v prostoru $\mathbb{R}^3$, přijmeme následující zjednodušenou konvenci. Řekneme, že M je *orientována vnějším normálovým polem*, jestliže každé normálové pole dílčích elementárních orientovaných ploch, jejichž sjednocením je orientovaná plocha (M), má směr mířící vně tělesa P. Podobně, plochu M nazveme *orientovanou vnitřním normálovým polem*, jestliže normálové pole všech dílčích elementárních ploch jsou orientována do vnitřku P. Vnitřní a vnější normálová pole jsou opačná.

Příklad 10.4. Nechť M je povrch koule s rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Plocha M bude orientována vnějším normálovým polem, jestliže má jednotkové normálové pole

$$\vec{n}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Analogicky, M bude orientována vnitřním normálovým polem, jestliže

$$\vec{n}(x, y, z) = -\frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Nyní můžeme přistoupit k definici plošného integrálu vektorového pole.

Definice 10.5. *Nechť* $(M) = \{(M_1, \vec{n}_1), \dots, (M_k, \vec{n}_k)\}$ *je orientovaná plocha. Nechť* $\vec{F}$ *je spojité vektorové pole definované na ploše* M. **Plošný integrál**

$$\iint\limits_{(M)} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

pole $\vec{F}$ **vzhledem k orientované ploše** (M) *je definován rovností*

$$\iint\limits_{(M)} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint\limits_{M_1} \vec{F}\cdot\vec{n_1}\,\mathrm{d}S + \cdots + \iint\limits_{M_k} \vec{F}\cdot\vec{n_k}\,\mathrm{d}S.$$

Pro označení plošného integrálu budeme někdy používat stručnější značení $\iint_{(M)} \vec{F}$. *Tento integrál se také nazývá* **tokem pole** $\vec{F}$ **plochou** M *nebo plošný integrál 2. druhu.*

Poznámka 10.6. Často se také používá složkové vyjádření

$$\iint\limits_{(M)} F_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + F_2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + F_3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{10.1}$$

kde F_1, F_2, F_3 jsou složky pole $\vec{F}$. Tento tvar má sice jisté zdůvodnění, ale pro naše účely to bude pouze alternativní způsob zápisu plošného integrálu vektorového pole.

Smyslem definice plošného integrálu vektorové pole je vyjádřit působení pole ve směru kolmém na plochu. Uvažujme pro jednoduchost orientovanou elementární plochu $(M, \vec{n})$, kde $\vec{n}$ je jednotkové normálové pole, tedy pole reprezentující kolmý směr k dané ploše. Každé vektorové pole $\vec{F}$ definované na ploše M můžeme rozložit do složky $\vec{F_n}$ kolmé k ploše M a složky $\vec{F_t}$ rovnoběžné s tečnou rovinou. Tedy

$$\vec{F} = \vec{F_n} + \vec{F_t}, \quad \text{kde} \quad \vec{F_n} = (\vec{F}\cdot\vec{n})\,\vec{n} \text{ a } \vec{F_n}\cdot\vec{F_t} = 0.$$

Plošný integrál pole $\vec{F}$ je definován jako plošný integrál skalárního součinu pole $\vec{F}$ s normálovým polem $\vec{n}$ dané plochy. Jeho hodnota bude tím větší, čím „více a souhlasněji“ bude pole $\vec{F}$ působit ve smyslu zadaného normálového pole. To je důvod, proč se integrál $\iint_M \vec{F}$ v aplikacích nazývá tokem pole $\vec{F}$ plochou M.

Poznámka 10.7. Nechť elementární plocha M je grafem funkce g definované na základní oblasti D, přičemž orientace je dána jednotkovým normálovým polem s kladnou z-ovou složkou. Plošný integrál vektorového pole $\vec{F}$ vzhledem k ploše M pak můžeme vyjádřit pomocí dvojného integrálu následujícím způsobem

$$
\begin{aligned}
(10.2)\qquad \iint\limits_{(M)} \vec{F} &= \iint\limits_{M} (\vec{F}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S \\
&= \iint\limits_{D} \vec{F}(x,y,g(x,y)) \cdot \frac{(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \\
&= \iint\limits_{D} \vec{F}(x,y,g(x,y)) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right).
\end{aligned}
$$

Tento vztah je výhodný pro výpočet v případě elementární plochy.

Příklad 10.8. Určete tok vektorového pole

$$\vec{F} = -k\,\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^{\alpha}},$$

kde $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$, $k, \alpha > 0$, kulovou plochou se středem v počátku a poloměrem $R > 0$. Orientace je přitom dána vnějším normálovým polem.

Vzhledem k tomu, že vnější normálové pole $\vec{n}$ je určeno vztahem

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|},$$

je podle Definice 10.5

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{(M)} \vec{F} &= -k \iint\limits_{M} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^{\alpha}} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = -k \iint\limits_{M} \frac{\|\vec{r}\|^2}{\|\vec{r}\|^{\alpha+1}} = -k \iint\limits_{M} \|\vec{r}\|^{1-\alpha} \\
&= -k \iint\limits_{M} R^{1-\alpha} = -kR^{1-\alpha}\cdot \text{obsah}(M) = -kR^{1-\alpha} 4\pi R^2 \\
&= -4\pi k\; R^{3-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Vektorové pole $\vec{F}$ můžeme v tomto případě chápat jako centrální silové pole, ve kterém je velikost působící síly nepřímo úměrná $(\alpha-1)$-mocnině vzdálenosti od počátku. Všimněme si, že pouze pro $\alpha = 3$ je tok daného pole nezávislý na poloměru R dané sféry a má hodnotu

$$\iint\limits_{(M)} \vec{F} = -4\pi k. \tag{10.3}$$

Tato skutečnost je jedním z důvodů pro hodnotu $\alpha = 3$ v Newtonově gravitačním zákoně.

Věnujme se nyní zobecnění vztahu (10.2) pro obecnou parametrizaci Φ dané plochy.

Tvrzení 10.9. *Nechť $(M, \vec{n})$ je elementární orientovaná plocha daná grafem funkce $z = g(x, y)$ definované na základní oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ a nechť normálové pole $\vec{n}$ má kladnou z-ovou složku. Dále, nechť*

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \colon T \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

je spojitá parametrizace plochy M, která je třídy C^1 na vnitřku T. Předpokládejme, že zobrazení $\theta = (\Phi_1, \Phi_2) \colon T \longrightarrow D$ je na vnitřku T prosté a s kladným determinantem Jacobiho matice, $\det J_\theta > 0$. *Pak pro každé spojité vektorové pole $\vec{F}$ na M platí*

$$\iint\limits_{(M)} \vec{F} = \iint\limits_{T} \vec{F}(\Phi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \tag{10.4}$$

Důkaz. Podle Věty 9.4 aplikované na funkci $f = \vec{F} \cdot \vec{n}$ můžeme psát

$$\iint\limits_{(M)} \vec{F} = \iint\limits_{M} \vec{F} \cdot \vec{n} = \iint\limits_{T} \vec{F}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \cdot \vec{n}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \, \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|. \tag{10.5}$$

Zjistíme, čemu se rovná normála $\vec{n}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$. Využijeme toho, že $\Phi_3 = g(\Phi_1, \Phi_2)$, a tím

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \Big(\frac{\partial \Phi_1}{\partial s}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial s}, \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \Big), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Big(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \Big).$$

Výpočtem stejným jako v důkaze Tvrzení 8.6 pak dostaneme, že

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \det J_\theta \cdot \Big(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \Big)$$

Vektor na pravé straně je normálový vektor k elementární ploše mající z-tovou složku kladnou, neboť $\det J_0 > 0$. Vidíme, že vektorový součin $\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ je normálový vektor se správnou orientací. Jednotkový normálový vektor je proto

$$\vec{n}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial s} \times \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}}{\left\| \dfrac{\partial \Phi}{\partial s} \times \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|}$$

Dosazením za $\vec{n}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ do (10.5) dostáváme dokazované tvrzení. □

V případě obecné plochy použijeme Tvrzení 10.9 na každý prvek rozkladu a příslušné integrály posčítáme. Dostaneme tak

Věta 10.10. *Nechť M je plocha se spojitou parametrizací $\Phi \colon D \longrightarrow M$ třídy C^1 a prostou na vnitřku základní oblasti D. Předpokládejme, že vektorový součin $\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ je nenulový ve všech vnitřních bodech D. Nechť orientace plochy $M = \Phi(D)$ je dána jednotkovým normálovým polem*

$$\vec{n} = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial s} \times \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}}{\left\| \dfrac{\partial \Phi}{\partial s} \times \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|}.$$

Pak

$$\iint\limits_{(M)} \vec{F} = \iint\limits_{D} \vec{F}(\Phi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right).$$

Příklad 10.11. Vypočtěte

$$\iint\limits_{(M)} x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x + (z^2 - 1) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

kde M je část válcové plochy

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \le z \le 1,$$

orientované vnějším normálovým polem.

Z tvaru integrálu porovnáním s (10.1) vidíme, že pole $\vec{F}$, které se integruje, má složky

$$\vec{F} = (x, y, z^2 - 1).$$

Dále, uvedenou plochu můžeme popsat pomocí parametrizace v cylindrických souřadnicích

$$\Phi(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z) \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, z \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Tedy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = (0, 0, 1), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0).$$

Vektor $(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ je jednotkovým normálovým vektorem vnějšího normálového pole. Podle Věty 10.10 tak máme

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(M)} x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x + (z^2 - 1) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos\varphi, \sin\varphi, z^2 - 1) \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \ \mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \ \mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z = 2\pi.\end{aligned}$$

2 Plošný integrál jako průtok plochou

V závěru této kapitoly se budeme věnovat důležitému aspektu plošného integrálu vektorového pole – průtoku nestlačitelné kapaliny plochou. Úloha stanovit množství kapaliny, které proteče za jednotku času danou plochou je trojrozměrnou analogií průtoku rovinnou oblastí, kterou jsme se zabývali v Kapitole 7 .

Uvažujme orientovanou plochu (M) s jednotkovým normálovým polem $\vec{n}$. Představme si, že prostor $\mathbb{R}^3$ je vyplněn nestlačitelnou proudící kapalinou, přičemž rychlost proudění v bodě (x, y, z) je dána vektorem $\vec{V}(x, y, z)$. Budeme se snažit odvodit integrální vyjádření pro množství kapaliny, které za jednotku času proteče plochou M.

Označme hledané množství symbolem $P(\vec{V}, (M))$ a pokusme se stanovit co nejjednodušší zákonitosti, které by měly hodnoty $P(\vec{V}, (M))$ splňovat. Zřejmě je splněn princip aditivity:

$$\text{(A)} \qquad P(\vec{V}, (M)) = P(\vec{V}, (M_1)) + P(\vec{V}, (M_2))$$

pro každý rozklad plochy M na plochy M_1 a M_2, kde orientace M_1 a M_2 je určena orientací plochy M. Tento zákon říká, že celkový průtok je roven součtu průtoků přes dílčí oblasti. Podobně jako v případě rovinného proudění je dále možno vyvodit, že průtok je způsoben pouze normálovou složkou vektorového pole rychlosti, nebo-li, že

$$P(\vec{V}, (M)) = P\big((\vec{V} \cdot \vec{n})\vec{n}, (M)\big).$$

Zcela přirozeně dále platí, že

$$\text{(10.6)} \qquad P\big((\min_M(\vec{V} \cdot \vec{n}))\,\vec{n}, (M)\big) \leq P(\vec{V}, (M)) \leq P\big((\max_M(\vec{V} \cdot \vec{n}))\,\vec{n}, (M)\big),$$

neboť pole $(\max_M(\vec{V} \cdot \vec{n}))\,\vec{n}$ a $(\min_M(\vec{V} \cdot \vec{n}))\,\vec{n}$ jsou konstantní vektorová pole daná maximální a minimální hodnotou rychlosti proudění kapaliny ve směru normálového pole. V případě proudění s konstantní velikostí rychlosti a to ve směru pole $\vec{n}$, je průtok roven součinu velikosti rychlosti a povrchu plochy. Aplikací tohoto pravidla dostaneme z nerovnosti (10.6) nerovnosti

$$\text{(M')} \qquad \big(\min_M(\vec{V} \cdot \vec{n})\big) \cdot \text{obsah}(M) \leq P(\vec{V}, (M)) \leq \big(\max_M(\vec{V} \cdot \vec{n})\big) \cdot \text{obsah}(M).$$

Použijeme-li nyní Větu 9.1 pro funkci $f = \vec{V} \cdot \vec{n}$ dostáváme

$$\text{(10.7)} \qquad P(\vec{V}, (M)) = \iint\limits_M \vec{V} \cdot \vec{n} = \iint\limits_{(M)} \vec{V}.$$

Integrál $\int\int_{(M)} \vec{V}$ nám dává bilanci průtoku kapaliny plochou M. Je-li tento integrál nulový, plochou M proteče stejné množství kapaliny z jedné strany na druhou jako v opačném směru. Je-li integrál kladný, převažuje proudění ve směru normály $\vec{n}$. A samozřejmě, při záporné hodnotě integrálu plochou proteklo více kapaliny ve směru $-\vec{n}$ než ve směru $\vec{n}$.

Příklad 10.12. Vypočtěte množství kapaliny, které proteče za jednotku času kulovou plochou o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ve směru vnějšího normálového pole, je-li rychlost kapaliny v bodě (x, y, z) rovna $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Podle (10.7) je

$$P(\vec{V}, (M)) = \iint\limits_{(M)} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\,\mathrm{d}\vec{S},$$

kde (M) je zadaná kulová plocha orientovaná vnějším normálovým polem. Tedy

$$P(\vec{V}, (M)) = \iint\limits_M (x, y, z) \cdot \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_M \|(x, y, z)\|\,\mathrm{d}S = \iint\limits_M r\,\mathrm{d}S = 4\pi r^3.$$

3 Cvičení

Úloha. Určete $\iint_{(M)} \vec{F}$, kde M je částí roviny

$$x + y + z = 1, \quad x, y, z \geq 0,$$

orientované normálovým polem s kladnou z-tovou složkou a $\vec{F}$ je konstantní vektorové pole

$$\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Řešení. Plochu M můžeme reprezentovat jako graf funkce

$$g(x, y) = 1 - x - y, \quad \text{definované na množině} \quad D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1,\ x, y \geq 0\}.$$

Tato plocha má konstantní jednotkové normálové pole, orientace je přitom souhlasná s polem $\vec{n} = (1, 1, 1)$, které je indukováno kartézskou parametrizací plochy. V důsledku (10.2). Máme tak

$$\iint\limits_{(M)} \vec{F} = \iint\limits_{D} (\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 4 \iint\limits_{D} 1 = 2.$$

Všimněme si na tomto příkladu skutečnosti, že je-li $\vec{F}$ konstantní a M je rovinná plocha, pak tok pole $\vec{F}$ přes plochu M reprezentuje objem zobecněného válce, jehož podstavou je plocha M a jehož hrany jsou tvořeny vektorem $\vec{F}$.

Úloha. Určete množství kapaliny P, které proteče povrchem krychle $K = \langle 0, a\rangle^3$ orientovaným vnějším normálovým polem za jednotku času, je-li proudění kapaliny popsáno rychlostním polem

$$\vec{V}(x, y, z) = (x^2 z + 1)\vec{k}.$$

Řešení. Podle (10.7) je

$$P = \iint\limits_{(M)} \vec{V},$$

kde (M) je povrch krychle orientovaný vnějším normálovým polem. Uvedený integrál je roven součtu integrálů přes jednotlivé stěny krychle. Vzhledem k tomu, že vektorové pole $\vec{V}$ je rovnoběžné s osou z, k nenulovému toku dochází pouze dolní a horní stěnou. Máme tak

$$P = \iint\limits_{(M_1)} \vec{V} + \iint\limits_{(M_2)} \vec{V},$$

kde (M_1) je graf konstantní funkce $f(x, y) = a$ definované na čtverci $\langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle$, orientovaný konstantním normálovým polem $\vec{k}$, zatímco (M_2) je graf nulové funkce definované na stejné množině orientovaný konstantním normálovým polem $-\vec{k}$. Tedy

$$P = \int\limits_0^a \int\limits_0^a (x^2 a + 1)(\vec{k} \cdot \vec{k})\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int\limits_0^a \int\limits_0^a \vec{k} \cdot \vec{k}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = a^2 - a^2 + a \int\limits_0^a \int\limits_0^a x^2\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{a^5}{3}.$$

Úloha. Orientovaná plocha (M) je částí hyperbolické plochy

$$x^2 + y^2 - z^2 = r^2,\ z \geq 0,\ r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2r^2,\ r > 0,$$

orientované jednotkovým normálovým polem $\vec{n}$, jehož z-ová složka je stále záporná. Určete tok pole $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, -y^2, z^2)$ plochou (M).

Řešení: Plocha M je grafem funkce

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}$$

definované na mezikruží $D = \{(x, y) \mid r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2r^2\}$. Podle (10.2) je

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(M)} \vec{F} &= \iint\limits_{D} (x^2, -y^2, x^2 + y^2 - r^2) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}, -1\right) \\ &= \iint\limits_{D} \left(\frac{x^3 - y^3}{\sqrt{x^2+y^2-r^2}} + r^2 - x^2 - y^2\right) = \iint\limits_{D} (r^2 - x^2 - y^2)\ .\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme využili skutečnosti, že

$$\iint\limits_{D} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2-r^2}} = \iint\limits_{D} \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2-r^2}} = 0,$$

díky symetrii integrovaných funkcí na dané oblasti. Řešení úlohy pak již můžeme snadno nalézt pomocí polárních souřadnic:

$$\iint\limits_{(M)} \vec{F} = \pi r^4 - \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_r^{\sqrt{2}r} \varrho^3\ d\varrho\, \mathrm{d}\varphi = \pi r^4 - \frac{3}{2}\pi r^4 = -\pi\frac{r^4}{2}.$$

Úloha. Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_{(M)} z\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

kde M je povrch elipsoidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\quad a, b, c > 0,$$

orientovaný vnějším normálovým polem

.

Řešení. Podle Poznámky 10.6 to znamená, že počítáme tok pole $\vec{F} = (0, 0, z)$. Pro výpočet integrálu se nejlépe hodí eliptické souřadnice, tedy parametrizace

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (a\cos\varphi\cos\vartheta, b\sin\varphi\cos\vartheta, c\sin\vartheta),$$

kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\vartheta \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Derivací parametrického vyjádření dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= (-a \sin \varphi \cos \vartheta, b \cos \varphi \cos \vartheta, 0), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} &= (-a \cos \varphi \sin \vartheta, -b \sin \varphi \sin \vartheta, c \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Přitom

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = (bc \cos \varphi \cos^2 \vartheta, ac \sin \varphi \cos^2 \vartheta, ab \cos \vartheta \sin \vartheta). \tag{10.8}$$

Je-li $\vartheta > 0$, je poslední složka normálového vektoru také kladná, a tedy námi zvolená parametrizace indukuje vnější normálové pole. Podle (10.4) máme

$$\begin{aligned} \iint\limits_{(M)} z \; \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} c \sin \vartheta ab \cos \vartheta \sin \vartheta \; \mathrm{d}\vartheta \; \mathrm{d}\varphi = 2\pi abc \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \; \mathrm{d}\vartheta = \\ &= 2\pi abc \int\limits_{-1}^{1} u^2 \; \mathrm{d}u = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

Vypočtěte následující plošné integrály:

1. $\displaystyle\iint\limits_{(M)} x^2 y^2 z \; \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde (M) je polovina kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \le 0$, orientována normálovým polem se zápornou složkou z;

2. $\displaystyle\iint\limits_{(M)} xz \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + xy \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + yz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde M je povrch jehlanu ohraničeného rovinami o rovnicích $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$. Orientace je dána vnitřním normálovým polem.

3. $\displaystyle\iint\limits_{(M)} (z - r)^2 \; \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde M je část kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 2rz$, $r \le z \le 2r$. Orientace je indukována vnějším normálovým polem.

4. $\displaystyle\iint\limits_{(M)} (y - z) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + (z - x) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + (x - y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde M je část kuželové plochy $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le h$. Orientace je indukována vnějším normálovým polem.

5. $\displaystyle\iint\limits_{(M)} z^2 \; \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde (M) je povrch elipsoidu s osami x, y, z, s poloosami a, b, c a středem v počátku, který je orientován vnějším normálovým polem.

6. $\displaystyle\iint\limits_{(M)} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \frac{1}{y} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + \frac{1}{z} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde (M) je povrch elipsoidu s osami x, y, z, s poloosami a, b, c a středem v počátku, který je orientován vnějším normálovým polem.

7. $\displaystyle\iint\limits_{(M)} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je kulová plocha daná rovnicí $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$. Orientace je dána vnějším normálovým polem.

8. Určete průtok plochou o rovnici $x^2+y^2+2az=a^2$, $x,y,z\geq 0$ orientovanou tak, že normálů má nezápornou z-ovou složku, je-li rychlost proudění $\vec{V}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$.

9. Vypočtěte množství kapaliny, které vyteče za jednotku času z množiny $x^2+y^2\leq r^2, 0\leq z\leq a$, $a>0$, je-li rychlost proudění $\vec{V}(x,y,z)=(xz,yz,xy)$.

10. Určete průtok helikoidem $M=\{(u\cos v,u\sin v,cv)\mid (u,v)\in\langle a,b\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\}$, $0<a<b,\ c>0$, jeli rychlostní pole $\vec{V}(x,y,z)=(x,y,z)$.

11. Nechť C je uzavřená kladně orientovaná jednoduchá křivka v rovině xy. Položme $M=C\times\langle 0,1\rangle$. Orientace této plochy je dána vnějším normálovým polem. Ukažte, že pro každé spojité pole $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$ je

$$\iint\limits_{(M)} F_1\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + F_2\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + F_3\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{(C)} (-F_2,F_1).$$

12. Nechť $\vec{F}=\varphi(x^2+y^2)(\vec{i}+\vec{j})$. Ukažte, že tok pole $\vec{F}$ přes každou orientovanou elementární plochu souměrnou podle osy z je nulový.

Výsledky.

1. $\frac{2\pi a^7}{105}$; 2. $\frac{1}{8}$; 3. $\frac{\pi r^4}{2}$; 4. 0; 5. 0; 6. $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$; 7. $\frac{8}{3}\pi(a+b+c)r^3$; 8. $\frac{\pi a^4}{12}$; 9. πr^2a^2; 10. $c\pi^2(b^2-a^2)$; 11. Využijte toho, že je-li $\vec{\tau}=(\tau_1,\tau_2)$ tečný vektor k C, je $\vec{n}=(\tau_2,-\tau_1,0)$ normálů k M; 12. Funkce g popisující plochu splňuje $g(x,y)=g(-x,-y)$.