16 Obyčejné diferenciální rovnice a jejich soustavy

16.1 Úvod - opakování

Opakování z 1. ročníku (z kapitoly 5)

Definice. Rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru

$$y' = g(y) \cdot h(t). \tag{1}$$

Návod k řešení:

- Pokud $g(c) = 0$, je funkce $y(t) = c$ řešením rovnice.
- Na intervalech, kde $g(y) \neq 0$ uvažte $\frac{y'}{g(y)} = h(t)$ s následným $\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)\,\mathrm{d}t$.
- Nutná je diskuse o možnostech navazování řešení předchozích dvou typů!

Definice. Lineární ODR prvního řádu je rovnice tvaru

$$y' + p(t)y = q(t), \tag{2}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$.

Návod k řešení:

- Násobte rovnici výrazem $e^{P(t)}$, kde P je primitivní funkce k p na (a, b).
- Upravte na levé straně do tvaru derivace součinu.
- Integrujte.

Definice. Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$Ay'' + By' + Cy = f(t), \tag{3}$$

kde A, B, $C \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, a funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu (a, b). Pokud je f identicky nulová na (a, b), nazýváme rovnici (3) **homogenní**.

Případ I:

$\boxed{f \equiv 0, \text{ rovnice: } Ay'' + By' + Cy = 0, \text{ obecné řešení } y_h}$

Pokud **charakteristická** rovnice $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ má:

1. dva různé reálné kořeny $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

2. jeden dvojnásobný reálný kořen λ:

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

3. dva komplexně sdružené kořeny $\alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$:

$$y_h(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

Případ II:

$\boxed{f \not\equiv 0, \text{ rovnice: } Ay'' + By' + Cy = f(t)}$

Pro řešení $y(t)$ platí:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

kde $y_h(t)$ je obecné řešení homogenní rovnice (viz předchozí případ) a $y_p(t)$ je **jedno** (jakékoliv), tzv. **partikulární** řešení rovnice $Ay'' + By' + Cy = f(t)$.

Některá partikulární řešení lze "uhodnout" podle tvaru pravé strany.

- Je-li $f(t) = P(t)e^{\alpha t}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a P je polynom, potom existuje polynom Q, st Q = st P, že
  1. $\alpha \neq \lambda_1, \alpha \neq \lambda_2 \implies y_p(t) = Q(t)e^{\alpha t}$,
  2. $\alpha \neq \lambda_1, \alpha = \lambda_2 \implies y_p(t) = tQ(t)e^{\alpha t}$,
  3. $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \implies y_p(t) = t^2 Q(t)e^{\alpha t}$.
- Je-li $f(t) = e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + R(t)\sin\beta t)$, ($P$, R polynomy), existují polynomy Q, S, stupně nejvýše $\max($st $P,$ st $R)$, takové, že
  1. $\alpha + i\beta \neq \lambda_1, \alpha + i\beta \neq \lambda_2 \implies y_p(t) = e^{\alpha t}(Q(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)$,
  2. $\alpha + i\beta = \lambda_1, \alpha + i\beta \neq \lambda_2 \implies y_p(t) = te^{\alpha t}(Q(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)$.

Konec opakování.

16.2 Lineární DR n-tého řádu s (ne)konstantními koeficienty

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t), \tag{4}$$

kde $a_0, \ldots, a_n$ a f jsou funkce spojité na daném intervalu (a, b), $a_n(t) \neq 0$ pro $t \in (a, b)$ (**lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s nekonstantními koeficienty**). Jsou-li **všechny** funkce $a_0, \ldots, a_n$ konstantní na intervalu (a, b), jde o **lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty**, ($f(t)$ nemusí být konstantní).

Homogenní rovnicí k rovnici (4) rozumíme rovnici

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \tag{5}$$

Věta 16.1. *Nechť $t_0 \in (a, b)$ a $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice* (4) *resp.* (5)*, které splňuje tzv.* ***počáteční podmínky***

$$y(t_0) = z_0,\ y'(t_0) = z_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu (a, b).

Věta 16.2 (o struktuře všech řešení)**.**

(i) *Maximální řešení rovnice* (5) *jsou definována na celém $\mathbb{R}$ a tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ dimenze n. Jeho jakoukoli bázi nazýváme* ***fundamentálním systémem*** *rovnice* (5)*.*

(ii) *Nechť y_p je maximální řešení rovnice* (4)*. Pak funkce y je jejím maximálním řešením, právě když ji lze zapsat ve tvaru $y = y_p + y_h$, kde y_h je vhodné řešení rovnice* (5)*.*

I. Hledání fundamentálního systému

Pro rovnici (5) s konstantními koeficienty lze použít tzv. **metodu charakteristického polynomu.** Pro rovnici (5), kde alespoň jeden z koeficientů je nekonstatní, nelze obecně explicite najít její fundamentální systém. (V některých speciálních případech to lze, jak uvidíme později) .

Definice. Nechť jsou koeficienty homogenní rovnice (5) konstantní. **Charakteristickým polynomem** rovnice (5) rozumíme polynom

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 16.3. *Nechť jsou koeficienty homogenní rovnice* (5) *konstantní. Nechť* $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu* P*, s násobnostmi* $r_1, \dots, r_s$*. Nechť* $\alpha_1 + \beta_1 i, \dots, \alpha_\ell + \beta_\ell i$ *jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu* P*, s kladnou imaginární částí a násobnostmi* $q_1, \dots, q_\ell$*.*

Pak funkce

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_\ell t}\cos\beta_\ell t, & te^{\alpha_\ell t}\cos\beta_\ell t, & \dots & t^{q_\ell-1}e^{\alpha_\ell t}\cos\beta_\ell t, \\
e^{\alpha_\ell t}\sin\beta_\ell t, & te^{\alpha_\ell t}\sin\beta_\ell t, & \dots & t^{q_\ell-1}e^{\alpha_\ell t}\sin\beta_\ell t
\end{array}$$

tvoří fundamentální systém homogenní rovnice (5) (s konstantními koeficienty).

II. Hledaní partikulárního řešení

Věta 16.4 (o uhodnutí partikulárního řešení)**.** *Nechť* (4) *je rovnice s* ***konstatními koeficienty****. Nechť*

$$f(t) = e^{\alpha t} \cdot (P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)\,,$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *a* P, Q *jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice* (4) *ve tvaru*

$$y_p(t) = t^m e^{\alpha t} \cdot (R(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)\,,$$

kde R, S *jsou vhodné polynomy stupně ne většího než* $\max\{$*stupeň* P*, stupeň* $Q\}$ *a* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *udává, jakou násobnost má číslo* $\alpha + i\beta$ *jakožto kořen charakteristického polynomu.*

Následující Lemma je základem tzv. **metody variace konstant** pro hledání partikulárního řešení lineární (nehomohenní) ODR, a to jak s konstantními tak s nekonstantními koeficienty.

Lemma 16.5. *Nechť* $y_1, \dots, y_n$ *tvoří fundamentální systém homogenní rovnice* (5) ***(s obecně nekonstatními koeficienty)****. Potom matice*

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

je regulární pro každé $t \in \mathbb{R}$*.*

Věta 16.6 (variace konstant)**.** *Nechť $y_1, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém rovnice* (5) ***(s obecně nekonst. koeficienty)****, $\mathbf{U}(t)$ buď jako v předchozí větě. Nechť $c_1(t), \ldots, c_n(t)$ řeší soustavu*

$$\mathbf{U}(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(t) \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t)/a_n \end{pmatrix}.$$

Pak funkce

$$y_p(t) := c_1(t)y_1(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t)$$

je (partikulární) řešení rovnice (4).

III. Fundamentální systém lineární rovnice s nekonstantními koeficienty, Wronskián

Definice. Buďte $y_1, \ldots, y_n$ funkce, definované na (a, b) a mající na něm $(n-1)$ vlastních derivací. Determinant

$$W(t) \equiv W_{[y_1,\ldots,y_n]}(t) := \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

nazýváme **Wronského determinantem (Wronskiánem)** funkcí $y_1, \ldots, y_n$.

Věta 16.7. *Nechť funkce $y_1, \ldots, y_n$ řeší na (a, b) lineární homogenní rovnici ($a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{C}(a, b)$, $a_n(t) \neq 0$ pro $t \in (a, b)$)*

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0.$$

Buď $W(t)$ Wronskián funkcí $y_1, \ldots, y_n$ na (a, b). Potom nastane právě jedna z následujících dvou možností:

1. $W(t) = 0\, \forall t \in (a, b) \iff y_1, \ldots, y_n$ *jsou LZ na* (a, b)*;*
2. $W(t) \neq 0\, \forall t \in (a, b) \iff y_1, \ldots, y_n$ *jsou LN na* (a, b)*.*

Věta 16.8. *Nechť funkce $y_1, \ldots, y_n$ řeší na (a, b) lineární homogenní rovnici ($a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{C}(a, b)$, $a_n(t) \neq 0$ pro $t \in (a, b)$)*

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0.$$

Buď $W(t)$ Wronskián funkcí $y_1, \ldots, y_n$ na (a, b). Potom

- $a_n(t)W'(t) + a_{n-1}(t)W(t) = 0, \quad t \in (a, b)$*;*
- $W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)}\, ds\right), \quad t, t_0 \in (a, b)$*.*

Příklad 1. *Mějme rovnici $ty'' + (1-t)y' - y = 0$. Tato rovnice degeneruje pro $t = 0$, řešíme ji tedy separátně na $t > 0$ a $t < 0$. Uvažujme například $t > 0$. Není příliš obtížné "uhodnout" jedno řešení rovnice, $y_1 = e^t$. V této situaci může pomoci Wronskián nalézt druhý prvek fundamentálního systému, funkci y_2. Příslušný Wronskián je jednak podle definice roven $e^t(y_2' - y_2)$, jednak platí $W(t) = W(1) \exp\left(-\int_1^t \frac{1-s}{s}\, ds\right) = \cdots = c\frac{e^t}{t}$. Odtud srovnáním dostaneme $y_2' - y_2 = c/t$ a řešením této lineární rovnice 1. řádu dostaneme (netriviální) druhý prvek fundamentálního systému původní rovnice. Dořešte úlohu podrobně.*

16.3 Speciální typy ODR

16.3.1 Rovnice ve tvaru totálního diferenciálu

Obecná rovnice 1. řádu s vyřešenou 1. derivací: $y' = f(x,y)$ lze formálně psát takto:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= f(x,y)\,\mathrm{d}x \\ 0 &= f(x,y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y \end{aligned}$$

obecněji:

$$\begin{aligned} 0 &= P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \overset{?}{=} \mathrm{d}\Phi(x,y) \\ 0 &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\Phi(x,y) \end{aligned}$$

Definice. Řekneme, že rovnice $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ **je ve tvaru totálního diferenciálu** na oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$, pokud existuje $\Phi \in \mathcal{C}^1(G)$ taková, že $\nabla\Phi = (P,Q)$ v G.

Řešení je poté:

$$\mathrm{d}\Phi(x,y) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(x,y) = c\,.$$

Poznámka. Rovnici ve tvaru totálního diferenciálu říkáme také **exaktní rovnice**.

Pozorování 1. *Pokud je $P, Q \in \mathcal{C}^1(G)$, je nutná podmínka pro to, aby rovnice $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ byla exaktní, rovnost $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ v G.*

Příklad 2. *Uvažujte rovnici*

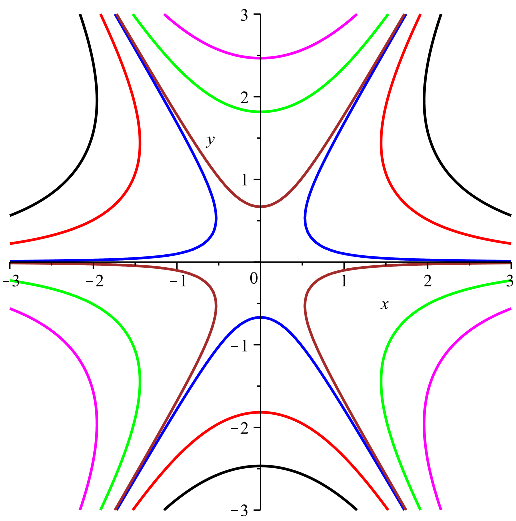
$$2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0\,.$$

Máme $P_y = 2x = Q_x$. Potenciálem je funkce $\Phi = x^2y - \frac{y^3}{3}$. Všechna řešení původní rovnice jsou tedy tvaru

$$x^2y - \frac{y^3}{3} = c\,.$$

Všimněte si, že v původní rovnici je role proměnných x, y rovnocenná, že tedy lze uvážit jak $y = y(x)$ a mít rovnici $y' = \frac{2xy}{y^2-x^2}$, ale také $x = x(y)$, a $x' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$. Dopočtěte, včetně určení definičních oborů řešení v obou případech, a provedení zkoušky dosazením.

Obrázek:
Množiny bodů $[x,y]$ v rovině, splňující vztah $x^2y - \frac{y^3}{3} = c$ pro hodnoty $c = 0.1, 2, 5, -0.1, -2, -5$.



Definice. Řeknu, že $\mu = \mu(x,y)$ je **integračním faktorem** rovnice $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ v oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$, pokud je rovnice

$$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{6}$$

exaktní v G.

Poznámka. Nutná podmínka exaktnosti rovnice (6) je rovnost $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$, tedy $\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x$. Nalezení integračního faktoru je obecně těžká úloha, proto se často předpokládá, že integrační faktor závisí pouze na x nebo pouze na y, nebo na výrazu $(x+y)$, případně na xy atd.

Cvičení. Řešte rovnici $y' = y^2 + \frac{y}{x}$ metodou převedení na exaktní tvar pomocí integračního faktoru, víte-li, že integrační faktor závisí pouze na proměnné y.

Návod k řešení.

- Zjistěte nejprve, že daná rovnice není exaktní.
- Najděte integrační faktor $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$.
- Najděte potenciál $\Phi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y}$ rovnice, přenásobené integračním faktorem, a odvoďte odtud, že řešeními původní rovnice jsou funkce $y(x) = \frac{2x}{2c-x^2}$, $c \in \mathbb{R}$. Udělejte kontrolu dosazením. Nezapomeňte diskutovat definiční obory pro řešení s různými c.

Cvičení. Řešte následující rovnice:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & xy^2\,\mathrm{d}x + (x^2y - x)\,\mathrm{d}y = 0 \\ \text{b)} & x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0 \end{array}$$

víte-li, že integrační faktor μ závisí pouze na součinu xy.

Řešení. a) $xy - \ln|y| = c$; b) $x^2y^2 + 2\ln\left|\frac{x}{y}\right| = c$.

16.3.2 Bernoulliho rovnice

Definice. **Bernoulliovou rovnicí** nazýváme ODR tvaru

$$y' + a(t)y = b(t)y^n\,, \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad n \notin \{0,1\}\,, \tag{7}$$

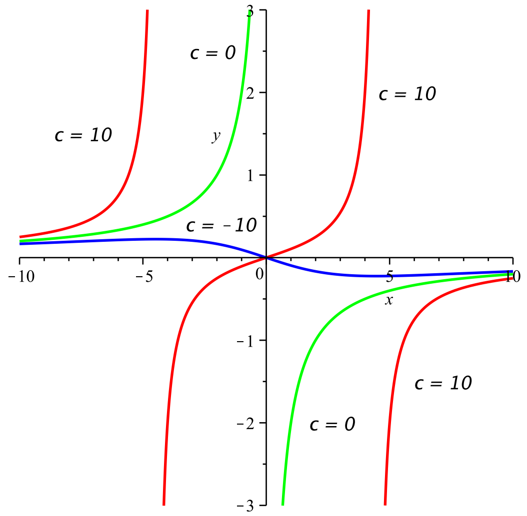
kde $a, b \in \mathcal{C}(J)$, $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval.

Návod k řešení: Pro $n = 0$ nebo $n = 1$ jde o lineární ODR 1. řádu. Pro jiná celá n zavedeme novou funkci $z = z(t)$ substitucí

$$y(t) = z(t)^{\frac{1}{1-n}}\,,$$

která převede rovnici (7) na lineární ODR 1. řádu.

Cvičení. Řešte rovnici $y' = y^2 + \frac{y}{t}$ jako Bernoulliovu. Porovnejte s postupem z přechozího paragrafu. Prohlédněte si grafy řešení, $y(t) = \frac{2t}{2c-t^2}$, pro hodnoty $c = 10, 0, -10$.



16.3.3 Speciální typy rovnic 2. řádu

Pro obecnou rovnici 2. řádu (vyřešenou vzhledem k nejvyšší derivaci), tj. pro rovnici tvaru

$$y'' = f(t, y, y') \tag{8}$$

nelze obecně stanovit postup pro řešení.

Pokud je však funkce f na pravé straně vztahu (8) jednodušší (speciálně není-li závislá na některém z výše uvedených argumentů), lze **v některých případech** řešení rovnice (8) najít.

Níže uvedená tabulka navrhuje postup řešení v případě, že rovnice $y'' = f(t, y, y')$ nabývá některého z jednodušších tvarů. Ne vždy je však zaručeno, že se řešení explicite najde (že úloha lze "dopočítat").

V $f(t, y, y')$ ...	**Tvar rovnice (8)**	**Návod k řešení**
1) "nechybí" nic	$y'' = f(t, y, y')$	obecně není
2) "chybí" t	$y'' = f(y, y')$	polož $y'(t) = p(y)$
3) "chybí" y	$y'' = f(t, y')$	polož $y'(t) = u(t)$
4) "chybí" y'	$y'' = f(t, y)$	obecně není
5) "chybí" t, y	$y'' = f(y')$	polož $y'(t) = u(t)$
6) "chybí" t, y'	$y'' = f(y)$	násob $2y'$
7) "chybí" y, y'	$y'' = f(t)$	dvakrát integruj
8) "chybí" t, y, y'	$y'' = c$	dvakrát integruj

Komentář k některým výše zmíněným případům:

ad 2): $y'(t) = p(y) \implies y''(t) = \frac{dy'(t)}{dt} = \frac{dp(y)}{dt} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy(t)}{dt} = p' \cdot p.$
Tedy $y'' = f(y, y') \quad \rightsquigarrow \quad p' \cdot p = f(y, p).$
Dostáváme rovnici 1. stupně pro $p = p(y)$. Ta však nemusí být vždy řešitelná.

ad 6): $y''(t) = f(y) \overset{\cdot 2y'}{\rightsquigarrow} 2y'y''(t) = 2y'f(y) \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow \left((y')^2\right)' = (2F(y))' \rightsquigarrow (y')^2 = 2F(y) + c.$
(F je primitivní k f.)
Dostáváme (po odmocnění) rovnici 1. řádu v separovaných proměnných.

Příklad 3 (k případu "2)"). • *Rovnici* $y'' = (y')^2 y + 3y$ *převede navrhovaná úprava na rovnici* $p' - py = 3yp^{-1}$*, což je Bernoulliho rovnice. Jejím řešením dostaneme* $p^2(y) = ce^{y^2} - 3$*, a po zpětném dosazení tedy* $(y')^2 = ce^{y^2} - 3$*,* $c \in \mathbb{R}$*. Jde (po odmocnění) o rovnici v separovaných proměnných. Její řešení však nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí.*

- *Rovnici* $y''y = (y')^2$ *půjde uvedenou metodou zcela vyřešit. Výsledek (spočtěte):* $y(t) = c_1 e^{c_2 t}$*,* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

16.3.4 Eulerova rovnice

Definice. Eulerovou rovnicí nazýváme **lineární ODR s nekonstantními koeficienty** tvaru

$$a_n t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} \cdots + a_1 t y' + a_0 y = f(t)\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,, \tag{9}$$

kde $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $f \in \mathcal{C}(J)$, $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval neobsahující nulu.

Poznámka. Pro $t = 0$ rovnice (9) **degeneruje**. Rovnici tedy uvažujeme separátně pro $t > 0$ a pro $t < 0$.

Poznámka. Jde o lineární rovnici (i když s nekonstantními koeficienty), pro její řešení proto platí příslušná teorie. Jde tedy o nalezení n prvkového fundamentálního systému pro homogenní rovnici (s $f = 0$), a poté o nalezení jednoho (partikulárního) řešení rovnice s pravou stranou. Pro nalezení partikulárního řešení lze použít např. metodu variace konstant. Eulerova rovnice tedy bude vyřešena, nalezneme-li její fundamentální systém.

Metoda nalezení FS Eulerovy rovnice

- Použijeme ansatz $y = t^\lambda$, který vede k tzv. charakteristickému polynomu pro Eulerovu ODR.
- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ kořenem tohoto polynomu násobnosti p, jsou odpovídajícími prvky fundamentálního systému funkce

$$\boxed{|t|^\lambda \ln^k |t|,} \qquad k = 0, \ldots, p-1.$$

- Je-li $\alpha + i\beta$ ($\beta > 0$) kořenem tohoto polynomu násobnosti p, jsou odpovídajícími prvky fundamentálního systému funkce

$$\boxed{|t|^\alpha \ln^k |t| \cdot \cos(\beta \ln |t|)\,, \quad |t|^\alpha \ln^k |t| \cdot \sin(\beta \ln |t|),}$$
$$k = 0, \ldots, p-1.$$

Poznámka. Eulerovu rovnici dostaneme např. při hledání sféricky symetrických řešení Laplaceovy rovnice $\Delta u = 0$ v celém $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Je-li u sféricky symetrická, je $u(x) = w(r)$, kde $r = |x| > 0$. Funkce w pak (jak lze ukázat) splňuje Eulerovu rovnici

$$r^2 w''(r) + (n-1) r\, w'(r) = 0\,.$$

Jejím řešením (proveďte) a zpětným dosazením dostaneme ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} n = 2 \quad &\Longrightarrow \quad u(|x|) = c_1 + c_2 \ln |x|\,, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,, \\ n > 2 \quad &\Longrightarrow \quad u(|x|) = c_1 + \frac{c_2}{|x|^{n-2}}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,. \end{aligned}$$

16.4 Řešení ODR pomocí Taylorových řad

Věta 16.9. *Uvažujme lineární rovnici n-tého řádu,*

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \tag{10}$$

na intervalu $J \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in J$. Dají-li se koeficienty a pravá strana rovnice (10) *rozložit do Taylorových řad na nějakém okolí $\mathcal{U}^\delta(t_0)$, přičemž $a_n(t_0) \neq 0$, lze každé řešení rovnice* (10) *rozložit na nějakém okolí $\mathcal{U}^\eta(t_0)$ do Taylorovy řady.*

Řešení: Uvážíme ansatz $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-t_0)^k$, který formálně n-krát proderivujeme člen po členu a dosadíme do rovnice. Jsou-li k (10) zadány počáteční podmínky (v bodě t_0), dosadíme uvedený ansatz i do nich.

Poznámky k řešení:

- Nejsou-li koeficienty a_j a pravá strana f ve tvaru mocninné řady, je potřeba rozložit do řady i je.
- Po formálním provedení všech algebraických operací s řadami porovnáme koeficienty u stejných mocnin t.
- Tím dostaneme soustavu nekonečně mnoha rovnic pro nekonečně mnoho koeficientů a_k, $k = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jejím vyřešením nalezneme hledanou funkci $y(t)$ ve tvaru mocninné řady. Na závěr určíme poloměr konvergence této řady.
- V případě homogenní rovnice ($f \equiv 0$) můžeme různou volbou okrajových podmínek obdržet různá řešení. Jejich lineární (ne)závislost je možno ověřit např. pomocí Wronskiánu.

16.5 Soustavy ODR 1. řádu

Uvažujme soustavu (obecných) diferenciálních rovnic 1. řádu, vyřešených vzhledem k 1. derivaci, ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{11}$$

kde f_j, $j = 1, \ldots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Vektorový tvar soustavy (11):

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t)),$$

kde $\vec{x}(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)$, $\vec{x}'(t) = \big(x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)\big)$, $\vec{f} = \big(f_1, f_2, \ldots, f_n\big)$.

Definice.

- **Řešením soustavy** (11) rozumíme vektorovou funkci $\vec{x} = \big(x_1, \ldots, x_n\big)$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x_j'(t)$, $j = 1, \ldots, n$, a platí (11).
- **Počáteční úlohou** pro (11) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení $\vec{x}$ soustavy (11) splňující navíc předem zadanou podmínku $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{\,0}$, kde $[t_0, \vec{x}^{\,0}]$ je daný bod z G (tzv. **počáteční podmínka**).
- **Maximální řešení** soustavy (11) je takové řešení $\vec{x}$ definované na intervalu J, které již nelze prodloužit, tj. je-li $\vec{y}$ řešení definované na intervalu I, $J \subset I$ a $\vec{y}(t) = \vec{x}(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.

Věta 16.10 (Peanova věta o existenci). *Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\vec{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na G. Pak pro každé $[t_0, \vec{x}^{\,0}] \in G$ existuje maximální řešení rovnice* (11) *splňující $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{\,0}$.*

Věta 16.11 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti). *Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\vec{f}$: $[t, \vec{x}] \mapsto \vec{f}(t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení na G a je "lokálně lipschitzovské v $\vec{x}$", tj. pro každý bod $[t, \vec{x}] \in G$ existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé dva body $[s, \vec{x}^1]$, $[s, \vec{x}^2]$ z $\mathcal{U}^\varepsilon([t, \vec{x}])$ máme*

$$||\vec{f}(s, \vec{x}^{\,1}) - \vec{f}(s, \vec{x}^{\,2})|| \le L||\vec{x}^{\,1} - \vec{x}^{\,2}||.$$

Jestliže $[t_0, \vec{x}^{\,0}] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice (11) *splňující $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{\,0}$.*

Uvažujme nyní soustavu **lineárních** diferenciálních rovnic 1. řádu ve tvaru

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t),\\
x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t),\\
&\vdots\\
x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t),
\end{aligned} \tag{12}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $b_i : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, jsou spojité funkce.

Vektorový tvar lineární soustavy (12) je:

$$\vec{x}' = \mathbf{A}(t)\vec{x} + \vec{b}(t),$$

kde

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Věta 16.12 (o existenci a jednoznačnosti řešení). *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\vec{x}^{\,0} \in \mathbb{R}^n$. Nechť $\mathbf{A} : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení $\vec{x}$ soustavy* (12) *splňující $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{\,0}$. Toto řešení je definováno na celém intervalu (α, β).*

Definice. Homogenní soustavou k soustavě (12) rozumíme soustavu

$$\vec{x}' = \mathbf{A}(t)\vec{x}. \tag{13}$$

Věta 16.13. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $\alpha < \beta$, a $\mathbf{A} : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{R})$ je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy* (13) *tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$. Dimenze tohoto podprostoru je rovna n. Jakoukoli bázi tohoto podprostoru, (složenou z vektorových funkcí $\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^n$), nazýváme **fundamentálním systémem** rovnice* (13).

Věta 16.14. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $\alpha < \beta$ a $\vec{x}^{\,0} \in \mathbb{R}^n$. Nechť $\mathbf{A} : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Nechť $\vec{y}_P$ je jedno (partikulární) řešení* (12) *na intervalu (α, β). Potom každé řešení $\vec{x}$ soustavy* (12) *na intervalu (α, β) má tvar $\vec{y}_P + \vec{y}_H$, kde $\vec{y}_H$ je jisté řešení homogenní soustavy* (13).

Definice. Nechť vektorové funkce $\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^n$ tvoří fundamentální systém rovnice (13). Označme

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \ldots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & \ldots & y_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(t) & \ldots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Matici Φ pak nazýváme **fundamentální maticí soustavy** (13).

Lemma 16.15. *Nechť Φ je fundamentální matice soustavy* (13). *Pak $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (\alpha, \beta)$.*

Věta 16.16 (variace konstant)**.** *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\vec{y}^0 \in \mathbb{R}^n$. Pak maximální řešení $\vec{y}$ rovnice* (12) *s počáteční podmínkou $\vec{y}(t_0) = \vec{y}^0$ má tvar*

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{y}^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\, ds, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

kde Φ je fundamentální matice soustavy (13).

Věta 16.17 (regularita řešení lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty)**.** *Nechť $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}$ a vektorová funkce $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je řešením soustavy $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$. Pak $\vec{x}$ je třídy C^∞ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\vec{x}^{(k)}(t) = \mathbf{A}^k\vec{x}(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$.*

• Vztah mezi soustavou rovnic 1. řádu a jednou rovnicí vyššího řádu

Nechť

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{14}$$

je rovnice n-tého řádu a nechť je $y(t)$ její řešení pro $t \in J \subset \mathbb{R}$.

Potom je vektorová funkce $\vec{x}(t) = \big(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\big)$ řešením soustavy

$$\vec{x}'(t) = \vec{F}(t, \vec{x})\,, \tag{15}$$

na intervalu J, kde $F_j(t, \vec{x}) = x_{j+1}$, $j = 1, \dots, n-1$, $F_n(t, \vec{x}) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$.

(A) Řešení soustav lineárních rovnic pomocí upravování

Soustavu rovnic upravujeme takovým způsobem, abychom získali jednu rovnici vyššího řádu s jednou neznámou funkcí. Tento způsob je vhodný pro soustavy s nemnoha (např. se dvěma) rovnicemi, nebo tehdy, obsahuje-li matice soustavy rovnic hodně nulových prvků (je tzv. řídká). Uvedeným způsobem je možno řešit i nehomogenní soustavy.

Příklad 4. *Najděte všechne maximální řešení soustavy*

$$\begin{aligned} y' &= 3y - 5z - 3e^t \\ z' &= y - z - e^t \end{aligned}$$

(B) Řešení soustav lineárních rovnic pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů

Věta 16.18. *Nechť matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ má n lineárně nezávislých vlastních vektorů $\vec{q}^{\,1}, \dots \vec{q}^{\,n}$, které po řadě přísluší vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Potom funkce*

$$e^{\lambda_1 t}\vec{q}^{\,1}, \dots, e^{\lambda_n t}\vec{q}^{\,n} \tag{16}$$

tvoří fundamentální systém lineární homogenní soustavy (s konstantními koeficienty)

$$\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}.$$

Věta 16.19. *Nechť $\vec{v}^{\,1}, \dots \vec{v}^{\,k}$, je řetězec vektorů, přidružený vlastnímu číslu λ matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$. Potom funkce*

$$e^{\lambda t}\vec{v}^{\,1}, e^{\lambda t}(t\vec{v}^{\,1} + \vec{v}^{\,2}), \dots, e^{\lambda t}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\vec{v}^{\,1} + \dots + t\vec{v}^{\,k-1} + \vec{v}^{\,k}\right) \tag{17}$$

jsou lineárně nezávislá řešení lineární homogenní soustavy (s konstantními koeficienty)

$$\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}.$$

Poznámka. Tvrzení předchozích dvou vět umožní sestavit fundamentalní systém dané lineární homogenní soustavy (s konstantními koeficienty), která je reprezentována maticí $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ tak, že převedeme matici $\mathbf{A}$ na Jordanův kanonický tvar, a nalezneme příslušné vlastní vektory resp. jejich řetězce. Prvky fundamentalního systému pak dostaneme jako sjednocení všech funkcí tvaru (16) resp. (17), které odpovídají všem blokům v Jordanově kanonickém tvaru matice $\mathbf{A}$.