Domácí úkol č. 7

Definice a věty

1. Naznačte odvození metody řešení nelineárních rovnic založené na Taylorově rozvoji druhého stupně dané funkce (Newtonova metoda je odvozena z rozvoje stupně prvého). Diskutujte výhody a nevýhody této metody v porovnání s metodou Newtonovou. Jaká bude rychlost její konvergence? Jaké budou nároky na počáteční nástřel? Jaká bude výpočetní náročnost jedné iterace?

2. Vyslovte a dokažte *Větu o odhadu chyby Taylorova rozvoje n-tého stupně*. Použijte tvrzení této věty v diskuzi rychlosti konvergence jednotlivých metod v předchozím případě.

Příklady

1. Pomocí Taylorova polynomu 3. stupně, $T_3(x)$ aproximujte hodnotu funkce $f(x) = \ln x + 1$ v bodě $x = 1.7$. Odhadněte velikost chyby této aproximace.

2. Numericky řešte rovnici $\mathrm{e}^x - x \sin x = 0$. Proveďte studium průběhu funkce, načrtněte graf a diskutujte počet kořenů této rovnice. Navrhněte metodu, pomocí které by šlo s jistou pravděpodobností získat všechny reálné kořeny i bez znalosti grafu. Zdůvodněte, proč je taková metoda v numerické praxi žádoucí.

3. Pomocí diferenciálu funkce

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) - \mathrm{e}^{\ln \pi}\,(1 - \mathrm{tg}\, 2x)$$

   v bodě $x_0 = 0$ vypočtěte přibližnou hodnotu $f(-0.1)$.