Bonusový Domácí úkol

Definice a věty

1. Definujte shora omezenou množinu.
2. Zaveďte pojem *funkce jedné reálné promenné*.
3. Pojednejte o souvislosti pojmů *funkce prostá*, *monotonní*, *spojitá*, *inverzní*.
4. Definujte *derivaci funkce*, zaveďte pojem *diferenciál* a vyjádřete derivaci jako podíl diferenciálů.
5. Vyslovte L'Hospitalovo pravidlo.
6. Definujte *lokální* a *globální extrém* funkce pomocí okolí. Zaveďte všechny potřebné pojmy.
7. Dokažte věty 8.2 a 8.3 o vlastnostech neurčitých integrálů na stranách 142 a 143 skript.
8. Odvoďte *lichoběžníkové pravidlo* pro výpočet určitého integrálu a *Eulerovu metodu* řešení diferenciální rovnice 1. řádu.
9. Zaveďte pojem *regulární matice*.
10. Popište obecný postup řešení NLDR 2. řádu se speciální pravou stranou. Věnujte se všem třem možným případům řešení přidružené HLDR.
11. Zaveďte *Euklidovskou normu vektoru* a definujte *jednotkový vektor*.

Příklady

1. Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos\sqrt{1-x}$$

a ověřte, že tato funkce je na svém definičním oboru prostá. Vypočtěte funkci inverzní. Určete definiční obor inverzní funkce.

2. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to-\infty} 10\,x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,.$$

3. Vypočtěte $f'(\pi)$, kde

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\cos x} + \ln\left(x^2 + \sqrt{x^4+1}\right).$$

4. Napište Taylorovu formuli s Taylorovým polynomem 2. stupně pro funkci

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

v bodě $x_0 = 1$ a vypočtěte pomocí tohoto polynomu přibližnou hodnotu $f(1,1)$. Pomocí zbytku $R_2(1,1)$ zjistěte, zda nalezená hodnota je větší nebo menší než přesná hodnota $f(1,1)$.

5. Zjistěte, kolik kořenu má rovnice

$$\operatorname{arctg} x = 2x + 1$$

a pro každý kořen nalezněte separační interval o délce nejvýše $0,5$.

6. Vypočtěte integrály (u neurčitého integrálu stanovte definiční obor integrované funkce)

$$\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int x\,\ln\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

7. Vypočtěte plochu rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce

$$f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}-x} - 1$$

a osou x. K výpočtu integrálu použijte lichoběžníkové pravidlo, volte $n = 5$.

8. Z vektoru

$$\vec{a} = (4,-1,3,0)\,,\quad \vec{b} = (3,4,-2,-2)\,,\quad \vec{c} = (5,-6,8,2)\,,\quad \vec{d} = (2,9,-7,-4)$$

vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektoru a zbylé vektory vyjádřete jako lineární kombinaci vybraných vektoru. Napište jeden libovolný vektor z prostoru $\mathcal{R}^4$, který neleží v podprostoru $\mathcal{R}^4$ generovaném vybranými vektory.

9. Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a určete dimenzi nejmenšího podprostoru, ve kterém leží všechna řešení.

10. a) Najděte partikulární řešení lineární diferenciální rovnice

$y'' - 2y' + 2y = 0$, které vyhovuje okrajové podmínce $y(0) = -1$, $y(\frac{\pi}{4}) = 0$.

b) Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + 2y = 2\cos x - \sin x\,.$$

K nalezení partikulárního řešení použijte metodu odhadu.